Theoretische Elektrodynamik, UE
Wintersemester 2020/2021
Zwischentest
02.12.2020
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Vorname: ____________________
Nachname: ____________________
Matrikelnummer: ____________________
Gruppe: ____________________

Aufgabe 1: Elektrodynamische Potentiale .... 4 points

Das Potential an einer Kugeloberfläche (Radius R) ist gegeben durch

$$V(R,\theta) = 1 + \cos\theta - 3\cos^2\theta\,.$$

i. Bestimmen Sie das Potential innerhalb und außerhalb der Kugel so, dass dieses im Ursprung endlich ist und im Unendlichen verschwindet. (2 Punkte).

ii. Überprüfen Sie, ob das von Ihnen berechnete Potential für $R = r$ tatsächlich das gegebene Potential der Kugeloberfläche liefert (1 Punkt).

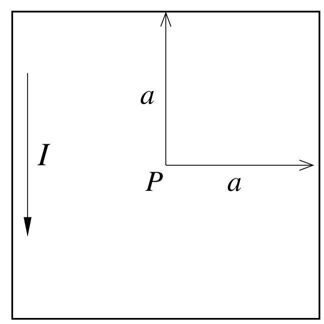
iii. Bestimmen Sie die induzierte Oberflächenladungsdichte σ der Kugel (1 Punkt).

Tipp: Die ersten Legendrepolynome lauten $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Benutzen Sie die Potentialentwicklung

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)\,.$$

Aufgabe 2: Quadratische Leiterschleife .... 3 points

Betrachten Sie eine quadratische Leiterschleife mit Seitenlänge $2a$ wie in der Abbildung angegeben. Es fließt ein konstanter Strom I gegen den Uhrzeigersinn durch diese Schleife. Berechnen Sie das Magnetfeld im Zentrum der Schleife, $P = (0,0,0)$. Verwenden Sie dazu das Gesetz von Biot-Savart für dünne Leiterschleifen:



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathbf{dl}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Folgendes Integral ist hilfreich:

$$\int_{-a}^{a} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{a^2}$$

Aufgabe 3: Elektrodynamische Potentiale .... 3 points

Gegeben sind die elektrodynamischen Potentiale

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r},t) &= 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= A_0 \left[(z - y + \alpha x)\mathbf{e}_x + (x - z + \beta y^2)\mathbf{e}_y + (y - x - \gamma z)\mathbf{e}_z \right] \cos(\omega t), \end{aligned}$$

mit den reellen Konstanten A_0, α, β und γ.

i. Welche Bedingungen müssen die Konstanten α, β und γ erfüllen, sodass die Potentiale die Coulombeichung erfüllen? (1 Punkt)

ii. Setzen Sie nun $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und $\gamma = 1$. Berechnen Sie aus den Potentialen das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. (2 Punkte)