

Theoretische Elektrodynamik, UE
 Wintersemester 2020/2021
 Endklausur
 04.02.2021
 Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Vorname: _____
 Nachname: _____
 Matrikelnummer: _____
 Gruppe: _____

Aufgabe 1: 4 points
 Das Vektorpotential einer Stromverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{J}(\mathbf{r})$ besitzt in der Wellenzone ($kr \gg 1$) bekanntermaßen die Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} d^3r'.$$

i. Schreiben Sie das Integral von $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ für die Stromverteilung

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I_0 \hat{\mathbf{z}} \delta(x) \delta(y) (|z| - a)^2, \quad -a \leq z \leq a$$

als Linienintegral $\int \dots dz'$ an. (Sie müssen das Integral *nicht* lösen). (2 Punkte)

Hinweis: Dieses Integral erhalten Sie, indem Sie die Stromverteilung in die Gleichung für das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ einsetzen und die Integration über die Variablen x' und y' durchführen.

ii. Schreiben Sie den Ausdruck für $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ nun in der *Dipolnäherung* ($ka \ll 1$), und lösen Sie das zugehörige Integral. (2 Punkte)

Hinweis: Für $x \ll 1$ gilt

$$e^x = 1 + O(x) \approx 1$$

Aufgabe 2: 6 points
 Die kontravariante Form des elektrischen Feldstärketensors ist gegeben durch ($c = 1$)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

i. Berechnen Sie die kovariante Form des Feldstärketensors $F_{\mu\nu} = g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} F^{\mu'\nu'} = GFG^T$. (2 Punkte)

Hinweis: Ähnlich wie in der Übung lässt sich diese Berechnung stark vereinfachen, indem man den metrischen Tensor in geeignete Blöcke zerlegt. Die Blöcke des Feldtensor können dann in gleicher Weise gewählt werden.

ii. Berechnen Sie den Lorentzskalar $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. (2 Punkte)

iii. Gegeben sei das elektrische Feld $\mathbf{E}'(\mathbf{r}')$ einer ruhenden Punktladung. Benutzen Sie die Lorentztransformation, um das $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ -Feld einer bewegten Punktladung, welche sich mit Geschwindigkeit v bewegt, zu bestimmen. (2 Punkte)