Theoretische Elektrodynamik, UE
Wintersemester 2024/2025
Zwischentest
25.04.2025
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Vorname: [redacted]
Nachname:
Matrikelnummer:
Gruppe:

Aufgabe 1: Vektorpotential in der Wellenzone .... 5 points

Das Vektorpotential einer Stromverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ besitzt in der Wellenzone ($kr \gg 1$) bekanntermaßen die Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\,d^3r'\,.$$

a) Schreiben Sie das Integral von $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ für die Stromverteilung

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I_0\hat{\mathbf{z}}\,\delta(x)\delta(y)\left(|z|-a\right)^2\,,\quad |z| \leq a$$

als Linienintegral $\int \ldots dz'$ an, wobei der Integrand explizit von der Integrationsvariable z' abhängen soll. Sie müssen das Integral *nicht* lösen.

b) Schreiben Sie den Ausdruck für $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ nun in der *Dipolnäherung* ($ka \ll 1$) und lösen Sie das zugehörige Integral.
Tipp: Berücksichtigen Sie einfachheitshalber nur den ersten Term.

Aufgabe 2: Liénard-Wiechert Potential .... 5 points

Gegeben sei ein Teilchen mit der Ladung $+q$, das sich entlang der x-Achse auf der Trajektorie

$$x'(t') = \sqrt{a^2 + (ct')^2}$$

bewegt. Für dieses Problem soll im Folgenden mit Hilfe des Liénard-Wiechert-Potentials

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{qc}{Rc - \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}\right]_{t'=t-\frac{R}{c}} \quad \text{with} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$$

das skalare Potential $\phi(x,t)$ bestimmt werden, wobei $x > x'(t')$ gelten soll.

(a) Wie lautet der Ausdruck für die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t')$?

(b) Wie lautet der Ausdruck für $\phi(x,t)$? Drücken Sie das Ergebnis durch x, t, x' und t' aus.

(c) Zeigen Sie, dass die retardierte Zeit folgende Form besitzt:

$$t_r = \frac{a^2 - (x-ct)^2}{2c(x-ct)}$$

Aufgabe 3: Relativistische Elektrodynamik .... 5 points

Gegeben sei eine statische Ladungsverteilung $\rho_{\text{stat}}(\mathbf{r})$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v in z-Richtung bewegt,

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_{\text{stat}}(x,y,z-vt)\,,\quad \mathbf{J}(x,y,z,t) = \hat{\mathbf{z}}v\,\rho_{\text{stat}}(x,y,z-vt)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass ρ und $\mathbf{J}$ die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

b) Gehen Sie vom Ruhesystem S' einer Punktladung aus. Zeigen Sie, dass $\Phi'(\mathbf{r}',t')$ und $\mathbf{A}'(\mathbf{r}',t')$ die Lorenzeichung erfüllen.

c) Bestimmen Sie nun durch Transformation die Potentiale $\Phi(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ für ein beliebiges Inertialsystem und zeigen Sie, dass diese nach wie vor die Lorenzeichung erfüllen.
Tipp: Setzen Sie $c = 1$.