2. Test Elektrodynamik, WS 2023/24

02.02.2024

Aufgabe 1. (25 Punkte)

Eine harmonische, ebene Welle trifft auf eine Grenzschicht an der Stelle $z = 0$ zwischen Luft ($z < 0$) und einem Dielektrikum ($z > 0$) und wird teilweise reflektiert:

$$\boldsymbol{E}(x, z) = E_0 \hat{\boldsymbol{y}}\, e^{i(k_x x + k_z z)} + R\, E_0 \hat{\boldsymbol{y}}\, e^{i(k_x x - k_z z)} \qquad \text{für } z < 0\,.$$

R ist der im Allgemeinen komplexe Reflexionskoeffizient, den Sie nicht berechnen müssen, und E_0 eine reelle Amplitude. Beantworten Sie folgende Fragen:

a. Wie sind die Kreisfrequenz ω und die Wellenzahlvektoren $(k_x, 0, \pm k_z)$ miteinander verknüpft?.

b. Bestimmen Sie die Komponenten von $\boldsymbol{B}$ für die einlaufende und reflektierte Welle.

c. Bestimmen Sie die zeitgemittelten Poyntingvektoren für die einlaufende und reflektiere Welle.

d. Bestimmen Sie die Intensität $I(x, z) = |\boldsymbol{E}(x, z)|^2$ für $z < 0$.

Aufgabe 2. (25 Punkte)

Gegeben sei eine Stromverteilung entlang der z-Achse ($-a \le z \le a$)

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \delta(x)\delta(y)\, \hat{\boldsymbol{z}}\,,$$

die mit der Kreisfrequenz ω schwingt. I_0 ist eine Konstante.

a. Wie lautet der Ausdruck für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}_{\text{far}}(\boldsymbol{r})$ im Fernfeld?

b. Bestimmen Sie $\boldsymbol{A}_{\text{far}}(\boldsymbol{r})$ unter Zuhilfenahme der Dipolnäherung $ka \ll 1$.

c ~~**d.**~~ Diskutieren Sie, wie man im Fernfeld aus $\boldsymbol{A}_{\text{far}}(\boldsymbol{r})$ die elektromagnetischen Felder bestimmen kann. Sie müssen die elektromagnetischen Felder nicht explizit ausrechnen. Welche Beziehungen gelten für $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ im Fernfeld?

d. **(etwas schwierger)** Bestimmen Sie $\boldsymbol{A}_{\text{far}}(\boldsymbol{r})$ *ohne* Zuhilfenahme der Dipolnäherung. Lösen Sie nur das Integral, das Ergebnis müssen Sie nicht weiter vereinfachen.

Tipp: drücken Sie den Kosinus in $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ durch Exponentialfunktionen aus.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen (Masse m), das zum Zeitpunkt null in Ruhe ist und auf das für eine bestimmte Zeit T eine konstante Kraft F_0 wirkt. Benutzen Sie die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma v) = \begin{cases} F_0 & \text{für } t < T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach dem Beschleunigsintervall T?

b. Zeichnen Sie ein Minkowsikidiagramm für den Fall, dass $v(T) = c/2$ gilt.