

LV-TEST WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE, STATISTIK, DATENANALYSE  
21.8.2014

JEDE TEILAUFGABE GIBT EINEN PUNKT.

1. Urnenexperiment. Eine Urne enthalte  $N_1$  weiße und  $N_2$  schwarze Kugeln. Es werde  $N$  mal ohne Zurücklegen gezogen.
  - (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Kugel weiß (schwarz) ist.
  - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $P(n_1, n_2 | N_1, N_2)$ ,  $n_1$  weiße und  $n_2$  schwarze Kugeln zu ziehen. Kommt es hierbei auf die Reihenfolge an?
  - (c) Was sind die Voraussetzungen für dieses Ergebnis?
  - (d) Wie lautet die Normierung von  $P(n_1, n_2 | N_1, N_2)$ ?
  - (e) Wie berechnet man aus  $P(n_1, n_2 | N_1, N_2)$  die mittlere Zahl  $\langle n_1 \rangle$  der weißen Kugeln?
2. Zählexperiment. Gegeben sei ein Zählexperiment, z.B. radioaktiver Zerfall.
  - (a) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung genügen die Zählraten  $N$ ? (Bezeichnung und Formel)
  - (b) Wenn  $\mu$  die mittlere Zählrate ist, wie groß ist dann die Varianz?
  - (c) Angenommen, das gemessene Signal  $S$  setzt sich additiv  $S = s_1 + s_2$  aus dem eigentlichen Messsignal  $s_1$  und einem Untergrund  $s_2$  zusammen. Beide seien Poisson-verteilt mit Mittelwerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Wie ist die Summe  $S$  verteilt und welchen Mittelwert  $\mu = \langle S \rangle$  hat sie?
3. Parameterschätzen. Zwischen einer Messgröße  $d$  und einer Steuergröße  $x$  bestehe der Zusammenhang  $d = f(x|a)$ , wobei  $a$  ein unbekannter Parameter ist. Es liege eine Stichprobe  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$  von Messwerten vor.
  - (a) Mit welchem Standardverfahren der Statistik kann man den Parameter  $a$  aus der Stichprobe bestimmen (Bezeichnung)?
  - (b) Falls die Messungen unkorreliert und Gauss-verteilt sind, mit welchem anderen Standard-Verfahren kann man dann den Parameter bestimmen. Welche Größe muss hierbei minimiert werden (Formel)?
  - (c) Wie würde man den Parameter  $a$  im Rahmen der Bayerischen Wahrscheinlichkeitstheorie bestimmen (Formel)?
  - (d) Was sind die Unterschiede der beiden Verfahren?
4. Gegeben sei eine Stichprobe  $\mathbf{d} := \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  unkorrelierter normalverteilter Messwerte, die zu den Steuergrößen  $\mathbf{s} := \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  gehören. Eine Theorie besagt, dass zwischen Mess- und Steuergröße die Beziehung  $d_j = f(s_j|a)$  besteht. Das soll anhand eines Hypothesentests überprüft werden.
  - (a) Welcher Test eignet sich hierzu (Bezeichnung)?
  - (b) Was sind die einzelnen Schritte des Test?
  - (c) Wie lautet die Formel für die Teststatistik?

- (d) Wie muss mit dem unbekanntem Parameter umgegangen werden und welchen Einfluss hat er auf die Stichprobenverteilung?
- (e) Kann man beweisen, dass eine Hypothese richtig ist?
- (f) Wie würde man im Rahmen der Bayerischen Wahrscheinlichkeitstheorie den Test durchführen?