Test zu "Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Datenanalyse" (SS 16)
28.6.2016

Die Punkte der Teilaufgaben stehen in eckigen Klammern.

1. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie I:
   A, C seinen Propositionen und $\mathcal{B}$ stelle den Bedingungskomplex dar.
   (a) Was sind Propositionen? [1]
   (b) Was versteht man unter dem Bedingungskomplex? [1]
   (c) Ergänzen Sie die Summenregel $P(A \vee C|\mathcal{B}) = \dots$ [1]
   (d) Ergänzen Sie die Produktregel $P(A \wedge C|\mathcal{B}) = \dots$ [1]
   (e) Wie vereinfachen sich die Produkt- und Summenregel, wenn die Propositionen A und C unabhängig voneinander sind? [2]
   (f) Wie lautet die Bayes'sche Formel für $P(A|C, \mathcal{B})$ und wie welche Bedeutung haben die Bestandteile [2]

   [Σ=8]

2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie II:
   Neben obigen Definitionen sei $\{D_i\}$ (für $i = 1, \dots, N$) ein vollständiger Satz von Propositionen, die sich paarweise gegenseitig ausschließen.
   (a) Was gilt dann für $\sum_{i=1}^{N} P(D_i|\mathcal{B})$? [1]
   (b) Wie kann man $P(A|\mathcal{B})$ über die Marginalisierungsregel mithilfe der D_i ausdrücken. Geben Sie die beiden alternativen Formeln hierfür an. [2]
   (c) $\overline{A}$ sei das Komplement von A. Wie hängen die Wahrscheinlichkeiten $P(A|\mathcal{B})$ und $P(\overline{A}|\mathcal{B})$ miteinander zusammen? [1]
   (d) Wie ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x|\mathcal{B})$ definiert? [1]

   [Σ=5]

3. Gängige Verteilungen:
   (a) Geben Sie die Formel für die Binomial Verteilung $P(n|N, p)$ an.
   N ist die Anzahl der Wiederholungen mit Zurücklegen und p die Einzelwahrscheinlichkeit. [1]
   (b) Wie lautet die Formel für die Poisson Verteilung $P(n|\mu)$ zum Mittelwert μ. [1]
   (c) Geben die Gamma Verteilung $p_\Gamma(x|\alpha, \beta)$ (ohne Normierungsfaktor) an. [1]
   (d) Wie lautet die Normal Verteilung $\mathcal{N}(x|x_0, \sigma)$ für eine Variable x mit Mittelwert x_0 und Varainz σ^2? [1]

   [Σ=4]

4. Zentraler Grenzwertsatz:
$\{t_1, t_2, \ldots, t_L\}$ sei eine Stichprobe von Messwerten.

(a) Wie ist der Stichproben-Mittelwert $\bar{t}$ definiert. [1]

(b) Was sagt der Zentrale Grenzwertsatz generell aus? [2]

(c) Wie kann man den Zentralen Grenzwertsatz verwenden, um Aussagen über den wahren Mittelwert $\langle t \rangle$ zu machen, wenn eine Stichprobe vorliegt. [1]

[Σ=4]

5. Parameterschätzen:
$\{t_1, t_2, \ldots, t_L\}$ sei eine Stichprobe von Messwerten und $\{s_1, s_2, \ldots, s_L\}$ seinen die zugehörigen Steuergrößen. Es gebe den Zusammenhang $t = f(s|a)$ zwischen Steuer- und Messgröße, wobei a einen unbekannten Parameter darstellt.

(a) Mit welcher Methode würde man in der konventionellen Statistik den Parameter a bestimmen? [1]

(b) Erklären Sie die Vorgehensweise dieses Verfahrens und die darin vorkommenden Größen. [1]

(c) Wann ist dieses Verfahren äquivalent zum Least-Squares Verfahren? [1]

(d) Wie würde man mit der Bayes'schen Wahrscheinlichkeitstheorie Parameter schätzen? [1]

(e) Wenn man $p(a|\{t_i\})$ kennt, welche Schätzwerte kann man dann für a angeben und wann wird man sie verwenden? [2]

(f) Wie kann man im Rahmen von Bayes Vertrauensintervalle definieren? [1]

[Σ=7]

6. Hypothesentests:
H_0 sei die Null-Hypothese, D stehe für die Daten und a für mögliche unbekannte Parameter.

(a) Erklären Sie die einzelnen Schritte der Hypothesentests der konventionellen Statistik anhand des χ^2-Tests [2]

(b) Was versteht man unter der Teststatistik und wie lautet die Formel hierfür im Fall des χ^2-Tests? [2]

(c) Was versteht man unter dem Fehler erster und zweiter Art? [1]

(d) Wie würde man in Rahmen der Bayes'schen Wahrscheinlichkeitstheorie Hypothesen testen. [2]

(e) Wie ist das 'Odds-Ratio' definiert. [1]

(f) Hierbei taucht eine Prior-Wahrscheinlichkeit auf. Welche Verfahren kennen Sie, um Prior-Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen [3]

[Σ=11]

(Punkte-Noten-Schlüssel: 1:35-39| 2:30-34| 3:25-29| 4:20-24| 5:1-19)