Prüfungsinformationen:

- **Die Klausuren werden schriftlich abgehalten:**
  - 1. Klausurtermin: 29.6.2017 11:45-13:15 (An/Abmeldung bis 25.6. 23:55)
  - 2. Klausurtermin: September oder Oktober 2017

Eine Anmeldung (Abmeldung) zur Klausur ist verpflichtend!

- **Notenspiegel:**

  Sehr Gut: 21.5-24 Punkte
  Gut: 18.5-21 Punkte
  Befriedigend: 15.5-18 Punkte
  Genügend: 12-15 Punkte
  Nicht Genügend: $<$12 Punkte

- **Aufbau der Klausur:**

2 Themengruppen:

  - 8 Definitions-Fragen (a 1 Punkt)
  - 8 Theorie-Fragen (a 2 Punkte)

- **Materialien:**

Die Verwendung jeglicher Unterlagen/Utensilien ist untersagt.

Klausurblätter inkl. Papier werden ausgegeben.

Bitte keinen Bleistift oder Füllfeder verwenden!

Bitte Ausweise mitbringen!

Bitte LESERLICH schreiben!

- **Generelle Informationen zu Verteilungen:**
  - Wahrscheinlichkeitsdichten, Verteilungsfunktionen, Erwartungswert und Varianz von Verteilungen sind Prüfungsstoff.
  - Nicht gefragt wird nach der vollständigen Herleitung des Erwartungswertes und der Varianz von Verteilungen, sowie den Normierungsbeweisen.
- **Generelle Informationen zu Beweisen:**
  - Beweise werden nicht geprüft.

Beispiel für eine Definitionsfrage:

Was versteht man unter dem Begriff der 'Additivität' im Kontext der Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie?

Beispiel für eine Definitionsfrage:

Was versteht man unter dem Begriff der 'Additivität' im Kontext der Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung disjunkter Ereignisse ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Beispiel für eine Definitionsfrage:

Was versteht man unter 'Kontraktionen'?

Beispiel für eine Definitionsfrage:

Was versteht man unter 'Kontraktionen'?

Vollständige Paarungen einer Population werden als Kontraktionen bezeichnet.

Beispiel für eine Definitionsfrage:

Was versteht man unter 'Elementarereignissen'?

Beispiel für eine Definitionsfrage:

Was versteht man unter 'Elementarereignissen'?

Ereignisse welche sich nicht weiter zerlegen lassen werden als Elementarereignisse bezeichnet.

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Was versteht man unter einem stochastischen Prozess? (1P)
b) Unterscheidet sich ein stochastischer Prozess von anderen Zufalls-Variablen? Wenn ja wodurch, Wenn nein, warum nicht? (0.5P)
c) Was ist zur Mittelung von stochastischen Prozessen festzustellen? (0.5P)

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Was versteht man in der Statistik unter einem stochastischen Prozess? (1P)

Wir gehen von einer parametrisierten Funktion

$$f(x|\lambda)$$

aus, bei der $x \in \mathbb{R}$ kontinuierliche Werte annimmt und $\lambda \in \mathbb{R}^{N_p}$ die Parameter der Funktion darstellen.

Wenn die Parameter λ Zufalls-Variablen sind, nennt man $f(x|\lambda)$ einen stochastischen Prozess.

Ein stochastischer Prozess ist also die Beschreibung von zeitlich geordneten, zufälligen Vorgängen.

Beispiel für eine Theoriefrage:

b) Unterscheidet sich ein stochastischer Prozess von anderen Zufalls-Variablen? Wenn ja wodurch, Wenn nein, warum nicht? (0.5P)

Stochastische Prozesse unterscheiden sich von anderen Zufalls-Variablen lediglich darin, dass die Zufalls-Variable nun einen kontinuierlichen Index erhält. Ansonsten gelten alle Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie unverändert.

Beispiel für eine Theoriefrage:

c) Was ist zur Mittelung von stochastischen Prozessen festzustellen? (0.5P)

Die Mittelungen von stochastischen Prozessen bedeutet, dass über die stochastischen Parameter gemittelt wird z.B.

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x|\lambda)\, p\lambda \, d\lambda \qquad .$$

Somit hängen dann die Mittelwerte auch von der unabhängigen Variablen (z.B. hier x) ab. Dies entspricht eigentlich nichts anderem als der Marginalisierungsregel.

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte (0.5P) und Varianz (0.5P) der Γ-Verteilung.

b) Welche Verteilung stellt den Spezialfall der Γ-Verteilung mit $(\alpha = \frac{n}{2}, \beta = \frac{1}{2})$ dar? (0.5P) Was ist bezüglich Erwartungswert und Varianz dieser Verteilung festzustellen? (0.5P)

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte (0.5P) und Varianz (0.5P) der Γ-Verteilung.

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$p_\Gamma(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\beta\, x}$$

Varianz:

$$var\,(x) = \alpha/\beta^2$$

b) Welche Verteilung stellt den Spezialfall der Γ-Verteilung mit $(\alpha = \frac{n}{2}, \beta = \frac{1}{2})$ dar? (0.5P) Was ist bezüglich Erwartungswert und Varianz dieser Verteilung festzustellen? (0.5P)

Die χ^2-Verteilung.

Erwartungswert und Varianz direkt über die Zahl der Freiheitsgrade bestimmt.

$$\langle x \rangle = n$$

$$var\,(x) = 2n$$

n : *Zahl der Freiheitsgrade (engl. degrees of freedom)*

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Wozu findet der F-Test Anwendung? (1P)

b) Wie ist die F-Statistik definiert? (0.5P) und welche Voraussetzungen gelten für die Durchführbarkeit des F-Tests? (0.5P)

c) Was ist bezüglich der Abhängigkeit der F-Statistik von den Mittelwerten der Stichproben festzustellen? (0.5P)

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Wozu findet der F-Test Anwendung? (1P)

Der F-Test dient zur Überprüfung der Null-Hypothese, dass die beiden vorliegenden Stichproben (ungeachtet der Mittelwerte) dieselbe intrinsische Varianz haben und deshalb auf denselben physikalischen Ursprung zurückgehen.

Beispiel für eine Theoriefrage:

b) Wie ist die F-Statistik definiert? (0.5P) und welche Voraussetzungen gelten für die Durchführbarkeit des F-Tests? (0.5P)

Unter der F-Statistik versteht man das Verhältnis der Schätzwerte zweier Stichproben-Varianzen.

$$f_0 = \frac{\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_2}^2}$$

Voraussetzung ist, dass die Elemente der Stichproben i.u.nv. sind, und wir nehmen an, dass beide Stichproben dieselbe intrinsische Varianz σ^2 besitzen.

Beispiel für eine Theoriefrage:

c) Was ist bezüglich der Abhängigkeit der F-Statistik von den Mittelwerten der Stichproben festzustellen? (0.5P)

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der F-Statistik hängt nicht von den Mittelwerten der beiden Stichproben ab.

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Warum spricht man bei statistischen Hypothesentests davon einen indirekten Schluss zu ziehen? (0.5P)
b) Auf Basis Welcher Grössen kann im Rahmen der Hypothesenüberprüfung ein Testentscheid getroffen werden? (0.5P)
c) Was ist beim Testen bezüglich der Nullhypothese festzuhalten? (0.5P)

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Warum spricht man bei statistischen Hypothesentests davon einen indirekten Schluss zu ziehen? (0.5P)

Man spricht desshalb davon einen indirekten Schluss zu ziehen da man davon ausgeht, dass die Null-Hypothese (H) korrekt ist. Für den Test gibt man ein sogenanntes **Signifikanz-Niveau** (Irrtumswahrscheinlichkeit) α vor, z.B. $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ und legt damit den Zurückweisungsbereich (kritischen Bereich) I_r^α fest, für den gilt

$$P(z \in I_r^\alpha | H) = \alpha.$$

Beispiel für eine Theoriefrage:

b) Auf Basis Welcher Grössen kann im Rahmen der Hypothesenüberprüfung ein Testentscheid getroffen werden? (0.5P)

Ein Testenscheid kann sowohl auf Basis des Vergleichs der Teststatistik mit dem theoretischen Wert als auch basierend auf dem p-Wert getroffen werden.

c) Was ist beim Testen bezüglich der Nullhypothese festzuhalten? (0.5P)

Hypothesen können nur beibehalten oder abgelehnt aber niemals verifiziert werden.

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Was versteht man unter dem Odds-Ratio ? (0.5) und in welche Faktoren kann es zerlegt werden? (0.5P)

b) Worin liegt ein wesentlicher Vorteil des Odds-Ratios bei Anwendung des Bayes Theorems? (0.5P)

c) Wie lautet die Basisgleichung des Odds-Ratios wenn wir die Fragestellung behandeln wollen ob eine Münze symmetrisch (fair) ist? (0.5P)

Beispiel für eine Theoriefrage:

a) Was versteht man unter dem Odds-Ratio ? (0.5) und in welche Faktoren kann es zerlegt werden? (0.5P)

$$o = \underbrace{\frac{p(D \mid H, \mathcal{I})}{p(D \mid \overline{H}, \mathcal{I})}}_{Bayes-Faktor} \underbrace{\frac{P(H \mid \mathcal{I})}{P(\overline{H} \mid \mathcal{I})}}_{prior-odds}$$

Die Posterior-Odds Raito kann in 2 Faktoren unterteilt werden, die sogenannten prior-odds welche unsere Einschätzung der Hypothese vor heranziehen der Daten wiedergeben und den sogenannten Bayes-Faktor, welcher den Einfluss der Daten auf das Problem quantifiziert.

Beispiel für eine Theoriefrage:

b) Worin liegt ein wesentlicher Vorteil des Odds-Ratios bei Anwendung des Bayes Theorems? (0.5P)

Der Vorteil des Odds-Ratios ist es dass man vermeidet - unter Anwendung des Bayes Theorem - den Normierungsnenner berechnen zu müssen.

Beispiel für eine Theoriefrage:

c) Wie lautet die Basisgleichung des Odds-Ratios wenn wir die Fragestellung behandeln wollen ob eine Münze symmetrisch (fair) ist? (0.5P)

Hier interessieren wir uns für

$$\begin{aligned} o &= \frac{P(H \mid n_k, N, \mathcal{I})}{P(\overline{H} \mid n_k, N, \mathcal{I})} \\ &= \frac{P(n_k \mid H, N, \mathcal{I}) P(H \mid \mathcal{I})}{P(n_k \mid \overline{H}, N, \mathcal{I}) P(\overline{H} \mid \mathcal{I})} \\ &= \underbrace{\frac{P(n_k \mid H, N, \mathcal{I})}{P(n_k \mid \overline{H}, N, \mathcal{I})}}_{Bayes-Faktor} \underbrace{\frac{P(H \mid \mathcal{I})}{P(\overline{H} \mid \mathcal{I})}}_{Prior-Odds} \end{aligned}$$