Übungsklausur

Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Datenanalyse

10.06.2024

Rechnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Beispiel 1 Wahrscheinlichkeitsdichte (16 Punkte)

a) **Rechenteil (8 Punkte):** Berechnen Sie Norm (**2P**), Erwartungswert (**2P**) und Varianz (**4P**) der Poisson-Verteilung. Nutzen Sie dafür

$$\mathcal{P}_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad , \quad \Phi(\omega) = e^{\lambda\left(e^{i\omega}-1\right)}.$$

b) **Verständnisteil (8 Punkte):** Skizzieren Sie die Normalverteilung für mind. zwei beliebige aber verschiedene Werte für Mittelwert μ und Varianz σ^2. Diskutieren Sie anhand der Skizzen, wie μ und σ^2 die Form der Normalverteilung beeinflussten (**4P**). Wie müsste man μ und σ^2 wählen, um die δ-Distribution anzunähern?(**2P**) Wieso ist der Wert $\delta(0) = \infty$ hier erlaubt? (**2P**)

Beispiel 2 Parameterschätzen (21 Punkte)

a) **Rechenteil (12 Punkte):** Aus einem Experiment kennen wir die Messwerte $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$, welche unabhängig voneinander sind. Die Messwerte folgen der Verteilung

$$p(x|\alpha,\mathcal{B}) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\alpha}$ unter Verwendung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung (**6P**). Berechnen Sie auch den Maximum-a-posteriori-Schätzwert (**6P**). Verwenden Sie dafür den Prior

$$p(\alpha|\mathcal{B}) = \frac{1}{\alpha}.$$

Hinweis: Es gilt $\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$.

b) **Verständnisfragen (9 Punkte):** Erklären Sie kurz anhand einer Skizze, welchen Einfluss der Prior auf unseren Schätzwert hat (**4P**). Geben Sie jeweils einen Prior an, welcher den Schätzwert stärker und einen der ihn schwächer als jener im Rechenteil beeinflusst (**2P**). Denken Sie, dass Ihr Maximum-Likelihood-Schätzwert verzerrt ist? (+kurze Begründung) (**3P**)

Beispiel 3 Hypothesentests (14 Punkte)

a) **Rechenteil (7 Punkte)**: Gegeben seien 10 Würfel. Neun dieser Würfel seien konventionell fair. Der letzte Würfel ist so manipuliert, dass dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% die Augenzahl *6* liefert. Ein zufällig ausgewählter Würfel liefert bei 50 Würfen 13 Mal die Augenzahl *6*. Berechnen Sie nun die Posterior-Wahrscheinlichkeit für die Hypothese "manipulierter Würfel" (**4P**). Berechnen Sie außerdem die Prior-ODDS (**1P**), den Bayes-Faktor (**1P**) und das ODDS-Ratio (**1P**).

b) **Verständnisteil (7 Punkte):** Wie sind Prior-ODDS (**1P**), Bayes-Faktor 1 (**1P**) und ODDS-Ratio (**1P**) zu interpretieren? Sollten Sie aufgrund des Bayes-Faktor die Hypothese wechseln? 2 (**1P**) Sollten Sie die Hypothese aufgrund des ODDS-Ratio wechseln? (**1P**) 3 Ist der Bayes-Faktor oder das ODDS-Ratio aussagekräftiger (+ kurze Begründung)? (**2P**) 4