Übungsklausur

Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Datenanalyse

04.06.2025

Rechnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Bitte leserlich schreiben.

Beispiel 1: Parameterschätzen (17 Punkte)

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_\sigma(x|\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\lambda)^2}.$$

Betrachten Sie N unabhängige Messungen für die Zufallsvariable x, d.h. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$.

a) Rechenteil (10 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Likelihood $p_\sigma(\vec{x}|\lambda)$. (2 Punkte)
2. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert λ_{ML} (ML-Schätzwert) für den Parameter λ. (4 Punkte)
3. Berechnen Sie den Maximum-a-posteriori-Schätzwert λ_{MAP} (MAP-Schätzwert) für einen Prior der Form $p(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}}$. (4 Punkte)

Hinweise:

- Die Messungen x_i sind unabhängig.
- Wenden Sie den Logarithmus auf die Wahrscheinlichkeitsdichte an, bevor Sie dem Parameter ableiten.
- Es könnte hilfreich sein, die Notation $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ zu verwenden.

b) Verständnisteil (7 Punkte)

1. Warum ergibt das Ergebnis für λ_{ML} im Kontext der Dichtefunktion Sinn? (2 Punkte)
2. Worin unterscheiden sich λ_{ML} und λ_{MAP}? Zeigen Sie explizit, welcher Wert größer/kleiner ist (Ungleichung). Warum würden Sie dieses Ergebnis allein anhand der Prior-Verteilung erwarten? (3 Punkte)
3. Was passiert im Grenzfall $N \to \infty$? Erklären Sie, warum dieses Ergebnis sinnvoll ist! (2 Punkte)

Beispiel 2: Charakteristische Funktion (15 Punkte)

Gegeben ist die Poisson Verteilung

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ mit } k = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Rechenteil (10 Punkte)

1. Berechnen Sie die charakteristische Funktion $\Phi_\lambda(\omega)$. (5 Punkte)
2. Berechnen Sie Normierung, Erwartungswert und Varianz, verwenden Sie $P_\lambda(k)$ oder $\Phi_\lambda(\omega)$. (5 Punkte)

Hinweis:

- Bedenken Sie, dass Sie die Exponentialfunktion auch als Summe schreiben können: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b) Verständnisteil (5 Punkte)

1. Wenn Sie Aufgabe a) 2. mithilfe von $P_\lambda(k)$ berechnet haben, geben Sie an wie die gleichen Werte (Normierung, Erwartungswert und Varianz) mit $\Phi_\lambda(\omega)$ bestimmt werden können bzw. umgekehrt. Die generellen Formeln sind hier ausreichend. Was erwarten Sie? Werden die Ergebnisse für beide Methoden gleich sein? (5 Punkte)

Hinweis:

- k ist eine ganze, zufällige Zahl.

Beispiel 3: Detektion eines seltenen nuklearen Zerfalls (18 Punkte)

Sie betreiben ein unterirdisches Labor, um nach einem seltenen, hypothetischen nuklearen Zerfall zu suchen. Unter Annahme der Null-Hypothese H_0 („nur Hintergrund") wird ein stündliches Signal mit der Wahrscheinlichkeit $p_0 = 0,02$ erwartet. Unter Annahme der alternativen Hypothese H_1 („Signal + Hintergrund") wird eine stündliche Trefferwahrscheinlichkeit von $p_1 = 0,1$ erwartet. Nun messen Sie in ihrem Exmperiment für $n = 30$ Stunden und notieren $k = 5$ Signale (Treffer).

a) Rechenteil (10 Punkte)

1. Berechnen Sie die jeweiligen Likelihoods $p(D|H_0)$ und $p(D|H_1)$, wobei mit D die experimentellen Daten (n und k) gemeint sind. (4 Punkte)
   Hinweis: Binomialmodell
2. Nehmen Sie an, dass keine Hypothese bevorzugt wird und berechnen Sie die Posterior-Wahrscheinlichkeiten $p(H_0|D)$ und $p(H_1|D)$. (4 Punkte)
3. Berechnen Sie das Odds-Ratio. (2 Punkte)

b) Verständnisteil (8 Punkte)

1. Welche Hypothese wird von den experimentellen Daten bevorzugt? (4 Punkte)
2. Angenommen, basierend auf anderen Experimenten und Ihrer ausgeprägten Intuition, gehen Sie davon aus, dass dieser hypothetische Zerfall nicht auftreten sollte. Daher wird der Nullhypothese eine Prior-Wahrscheinlichkeit von $p(H_0) = 0,99$ zugewiesen. Welche Hypothese wird nun bevorzugt? Erklären Sie. (4 Punkte)