

ÜBUNGSKLAUSUR

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE, STATISTIK UND DATENANALYSE

13.06.2023

Rechnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Beispiel 1 Wahrscheinlichkeitsdichte (16 Punkte)

- a) **Rechenteil (8 Punkte):** Berechnen Sie Norm (2P), Erwartungswert (2P) und Varianz (4P) der Normalverteilung. Nutzen Sie dafür

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \Phi(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

- b) **Verständnisteil (8 Punkte):** Skizzieren Sie die Normalverteilung für mind. zwei beliebige aber verschiedene Werte für Mittelwert μ und Varianz σ^2 . Diskutieren Sie anhand der Skizzen, wie μ und σ^2 die Form der Normalverteilung beeinflussen (4P). Wie müsste man μ und σ^2 wählen, um die δ -Distribution anzunähern? (2P) Wieso ist der Wert $\delta(0) = \infty$ möglich? (2P)

Beispiel 2 Parameterschätzen (21 Punkte)

- a) **Rechenteil (12 Punkte):** Aus einem Experiment kennen wir die Messwerte $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, welche unabhängig voneinander sind. Die Messwerte folgen der Verteilung

$$p(x|\alpha, \mathcal{B}) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\alpha}$ unter Verwendung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung (6P). Berechnen Sie auch den Maximum-a-posteriori-Schätzwert (6P). Verwenden Sie dafür den Prior

$$p(\alpha|\mathcal{B}) = \frac{1}{\alpha}.$$

Hinweis: Es gilt $\overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$.

- b) **Verständnisfragen (9 Punkte):** Erklären Sie kurz anhand einer Skizze, welchen Einfluss der Prior auf unseren Schätzwert hat (4P). Geben Sie jeweils einen Prior an, welcher den Schätzwert stärker und einen der ihn schwächer als jener im Rechenteil beeinflusst (2P). Denken Sie, dass Ihr Maximum-Likelihood-Schätzwert verzerrt ist? (+kurze Begründung) (3P)

Beispiel 3 Hypothesentests (13 Punkte)

- a) **Rechenteil (7 Punkte):** Zur Auswahl stehen zwei Würfel (ein konventionell fairer und ein manipulierter). Der manipulierte Würfel liefert mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% die Augenzahl 6. Der erste Würfel liefert bei 50 Würfeln 9 Mal die Augenzahl 6. Der zweite Würfel liefert bei 50 Würfeln 20 Mal die Augenzahl 6. Berechnen Sie Posterior (2P) sowie ODDS-Ratio (1P) für den ersten Würfel. Berechnen Sie anschließend Posterior (3P) und ODDS-Ratio (1P) für beide Würfel.

Hinweis: Nutzen Sie die Gegenwahrscheinlichkeit, um sich etwas Arbeit zu sparen.

- b) **Verständnisteil (6 Punkte):** Erklären Sie kurz wie der Einfluss der Daten auf unsere Wahrscheinlichkeiten zu verstehen ist (Prior vs. Posterior) (4P). Können wir in diesem Beispiel eine der Hypothesen verifizieren oder falsifizieren? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (2P)