Prof. Dr. A. Maas
Institut für Physik

N A W I
G R A Z

Klausur zur Vorlesung Quantenmechanik

SS 2018

05. Juli 2018

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ ID Nummer: ____________

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer. Zum Bestehen der Klausur sind maximal 50 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K1	K2a	K2b	K2c	K2d	K2e	K3	$\sum$	Note

Aufgabe K1: Störungstheorie (45 Punkte)

Bestimmen Sie für den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}(P-\alpha)^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2$$

die Änderung der Eigenenergien

$$\Delta_n = E_n(\alpha) - E_n(\alpha = 0)$$

mittels Störungstheorie bis einschließlich 2. Ordnung in dem kleinen, reellen Parameter α.

Aufgabe K2: Messungen (7+7+7+7+7=35 Punkte)

Betrachten Sie ein degeneriertes Dreizustandssystem mit Hamiltonoperator H und einer zweiten Observablen L. Dabei ist eine mögliche Basis von Eigenzuständen $|E,l\rangle$ gegeben durch $\{|E_1,0\rangle, |E_2,-1\rangle, |E_2,1\rangle\}$ mit $E_1 < E_2$ den Eigenwerten von H und l den Eigenwerten von L.
Betrachten Sie nun den Zustand

$$|\alpha\rangle = |E_1,0\rangle + |E_2,1\rangle - 2|E_2,-1\rangle$$

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Sie die Eigenwerte von H und L messen.

b) Welche tatsächlichen Meßergebnisse für H und L können gemessen werden? Was sind die Erwartungswerte für H und L?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei der Messung von H E_1 zu messen und bei einer Messung von L danach -1?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei der Messung von H E_2 zu messen und bei einer Messung von L danach 1?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in dem Zustand $|\beta\rangle = |E_1, 0\rangle - |E_2, 1\rangle$ zu finden?

Aufgabe K3: Interpretation (20 Punkte)

Geben Sie Ihre Interpretation, wie Sie Quantenmechanik verstehen. Begründen Sie Ihre Antwort. Verwenden Sie maximal 250 Worte.

Formelsammlung

$1 = \sum_a |a\rangle\langle a|; \quad X_{ij} = \langle i|X|j\rangle; \quad [S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k; \quad [AB, C] = A[B,C] + [A,C]B;$

$\Delta A = A - \langle A\rangle; \quad \langle(\Delta A)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2; \quad la(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta A, \Delta B\}\rangle|^2;$

$[U^\dagger AU, U^\dagger BU]_\pm = U^\dagger[A,B]_\pm U; \quad \langle x|y\rangle = \delta(x-y); \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}; \quad T(l) = e^{-\frac{iPl}{\hbar}};$

$\psi(x) = \langle x|a\rangle; \quad \langle a|b\rangle = \int dx \psi_a^*(x)\psi_b(x); \quad \langle x|p\rangle = Ce^{\frac{ipx}{\hbar}}; \quad i\hbar\partial_t|a,t\rangle = H|a,t\rangle;$

$U(t,t_0) = e^{-\frac{iH}{\hbar}(t-t_0)}; \quad U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^\infty \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 ... \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)...H(t_n);$

$H = \frac{P^2}{2m}; \quad \langle x|P|p\rangle = p\langle x|p\rangle = -i\hbar\partial_x\langle x|p\rangle; \quad \Psi_a(x,t) = a_1 e^{i(\omega t + kx)} + a_2 e^{i(\omega t - kx)};$

$A(t) = U(t)^\dagger A(0)U(t); \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H]; \quad |a,t\rangle = \sum_n a_n(0)e^{i\frac{E_n t}{\hbar}}|E_n\rangle; \quad E\phi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}d_x^2 + V(x)\right)\phi(x);$

$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{iP}{m\omega}\right); \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X - \frac{iP}{m\omega}\right); \quad [a, a^\dagger] = 1; \quad [N, a] = -a;$

$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right); \quad H|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle; \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle;$

$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; \quad \lim_{0<\epsilon\to 0}\phi(x+\epsilon) = \lim_{0<\delta\to 0}\phi(x-\delta);$

$\lim_{0<\epsilon\to 0} d_x\phi(x+\epsilon) = \lim_{0<\delta\to 0} d_x\phi(x-\delta); \quad Y_{ll_3}(\theta,\omega) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-l_3)!}{(l+l_3)!}}P_l^{l_3}(\cos\theta)e^{il_3\omega};$

$P_l^{l_3\geq 0}(x) = (-1)^{l_3}(1-x^2)^{\frac{l_3}{2}} d_x^{l_3} P_l(x); \quad P_l^{l_3<0}(x) = (-1)^{-l_3}\frac{(l+l_3)!}{(l-l_3)!}P_l^{-l_3}; \quad [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k;$

$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm; \quad \vec{L}^2 = L_\mp L_\pm + L_z^2 \pm \hbar L_z; \quad \vec{L}^2|l,l_3\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,l_3\rangle;$

$|z,t\rangle = e^{-\frac{|\zeta|^2}{4a_0^2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\zeta e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}a_0}\right)^n|n\rangle; \quad K(x,t,y,t_0) = \langle x,t|y,t_0\rangle; \quad C(E) = \sum_{E'}\frac{1}{E-E'};$

$|n^{(1)}\rangle = \sum_{k\neq n}\frac{V_{kn}}{E_n^0 - E_k^0}|k^{(0)}\rangle; \quad \Delta_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle; \quad \Delta_n^{(2)} = \sum_{n\neq k}\frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}};$

$|n^{(2)}\rangle = \sum_{k\neq n, l\neq n}\frac{V_{kl}V_{ln}}{\left(E_n^{(0)} - E_k^{(0)}\right)\left(E_n^{(0)} - E_l^{(0)}\right)}|k^{(0)}\rangle - \sum_{k\neq n}\frac{V_{nn}V_{kn}}{\left(E_n^{(0)} - E_k^{(0)}\right)^2}|k^{(0)}\rangle;$

$Z_n = 1 - \lambda^2\sum_{k\neq n}\frac{|V_{kn}|^2}{\left(E_n^{(0)} - E_k^{(0)}\right)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3); \quad e_0 = \frac{\langle 0|H|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} \geq E_0; \quad S(x) = \pm\int_{x_0}^x dx'\sqrt{2m(E - V(x'))};$

$U_I^{(n)}(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t dt' \frac{1}{\lambda}V_I(t')U_I^{(n-1)}(t',t_0); \quad w_{n\to m} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{nm}|^2\rho(E_n);$

$\frac{d_t c_{n\approx m}}{c_{n\approx m}} = -\frac{i}{\hbar}V_{nn} - \frac{i}{\hbar}\sum_{k\neq n,m}\frac{|V_{nk}|^2}{E_n - E_k + i\hbar\eta}; \quad \rho = \sum_i w_i|i\rangle\langle i|; \quad \langle\langle A\rangle\rangle = \mathrm{tr}(\rho A)$

Lösungen:

Aufgabe K1

Es handelt sich bei $\alpha = 0$ um den harmonischen Oszillator. Umschreiben als

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2 - \frac{\alpha}{m}P + \frac{\alpha^2}{2m} = H_0 - \frac{\alpha}{m}P + \frac{\alpha^2}{2m}$$

identifziert sowohl eine fixe Energieverschiebung $\alpha^2/(2m)$, die von zweiter Ordnung in α ist, als auch ein Störpotential P/m, dessen Effekt man in Störungstheorie bestimmen kann. Dabei hilft die Darstellung des Problems in Erzeugern und Vernichter. Das relevante Matrixelement ist dann (15 Punkte)

$$V_{nk} = -\frac{1}{m}\langle n\,|P|\,k\rangle = -i\frac{1}{m}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left\langle n\left|(a - a^\dagger)\right|k\right\rangle = -i\frac{1}{m}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{k}\delta_{n,k-1} - \sqrt{k+1}\delta_{n,k+1}\right).$$

Da $V_{nn} = 0$ (10 Punkte) gibt es keinen Beitrag zu erster Ordnung. Damit bleibt (15 Punkte)

$$\begin{aligned}\Delta_n^{(2)} &= \sum_{n\neq k}\frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{m\hbar\omega}{2m^2\hbar\omega}\sum_{n\neq k}\frac{k\delta_{n,k-1} + (k+1)\delta_{n,k+1} - \sqrt{k(k+1)}\delta_{n,k-1})\delta_{n,k+1}}{n-k}\\ &= \frac{1}{2m}\left(\frac{n+1}{-1} + \frac{n}{1}\right) = -\frac{1}{2m}\end{aligned}$$

Der Gesamteffekt ist also (den zweiten Term zu berücksichitgen sind 5 Punkte)

$$E(\alpha = 0) - E(\alpha) = \frac{\alpha^2}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

D. h. eine Abweichung der Energien beginnt frühestens ab der dritten Ordnung in α.

Aufgabe K2

Zum beantworten der Fragen ist es notwendig, zunächst den Zustand zu normieren. Mit

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 + 1 + 4 = 6$$

ist der notwendige Vorfaktor $1/\sqrt{6}$.

a) Die relevanten Wahrscheinlichkeiten sind

$$\begin{aligned}E_1: &\quad |\langle E_1, 0|\alpha\rangle|^2 = \frac{1}{6}\\ E_2: &\quad |\langle E_2, 1|\alpha\rangle|^2 + |\langle E_2, -1|\alpha\rangle|^2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}\\ l = 0: &\quad |\langle E_1, 0|\alpha\rangle|^2 = \frac{1}{6}\\ l = 1: &\quad |\langle E_2, 1|\alpha\rangle|^2 = \frac{1}{6}\\ l = -1: &\quad |\langle E_2, -1|\alpha\rangle|^2 = \frac{4}{6}\end{aligned}$$

b) Für alle Werte der Eigenwerte sind die Wahrscheinlichkeiten nicht verschwindend. Daher können alle Werte gemessen werden. Die Erwartungswerte sind

$$
\begin{aligned}
\langle H \rangle &= \langle \alpha | H | \alpha \rangle = \frac{1}{6}(E_1 + E_2 + 4E_2) = \frac{E_1 + 5E_2}{6} \\
\langle L \rangle &= \frac{1}{6}(0 + 1 - 4) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

c) Laut (a) ist die Wahrscheinlichkeit für die erste Messung 1/6. Danach ist der Zustand im Eigenzustand $|E_1, 0\rangle$, der keinen Überlapp mit $|E_2, -1\rangle$ hat. Daher ist die Wahrscheinlichkeit danach -1 zu messen Null.

d) Laut (a) ist die Wahrscheinlichkeit für die erste Messung 5/6. Danach ist der Zustand in einer zufälligen Überlagerung der beiden degenerierten Zustände $|E_2, 1\rangle$ und $|E_2, -1\rangle$. Eine Prognose für die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Messung von L ist daher nicht möglich.

e) Der Zustand β muß dazu normiert werden, was einen Vorfaktor $1/\sqrt{2}$ ergibt. Das Ergebnis ist dann gegeben durch

$$
|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{12}} |1 - 1|^2 = 0,
$$

und der Übergang findet daher nicht statt.

Aufgabe K3

Es gibt hier keine 'richtige' Antwort. Sofern die Bergündung logisch konsistent ist, und nicht im Widerspruch zu den experimentellen Resultaten steht, ist jede Antwort akzeptabel. Lediglich eine Antwort ohne Begründung, wie 'Kopenhagener Deutung' oder dergleichen, ist nicht ausreichend.
Was nicht gefragt ist, ist, z. B., die Postulate der Quantenmechanik. Es geht darum, welche Aussage die Quantemechanik nach Ansicht des Beantwortenden über die Eigenschaften der Natur macht, wie z. B. die Kopenhagener Deutung die Interpretation macht, dass die Natur inhärent nichtdeterministisch ist.