Quantenmechanik
Sommersemester 2015
1. Klausur
01.07.2015
Bearbeitungszeit: max. 240 Minuten

Vorname: [redacted]
Nachname:
Matrikelnummer:

Schreiben Sie bitte Ihren Namen auf dieses und jedes weitere Blatt für den Fall, dass die Seiten getrennt werden.

Zugelassene Hilfsmittel:
Vorlesungsskript und **1 doppelseitig händisch beschriebenes DIN-A4-Blatt**

Aufgabe 1: Potenzialprobleme .... 10 Punkte

(a) [5 Punkte] **Oszillator im elektrischen Feld**
Für einen harmonischen Oszillator im elektrischen Feld $\vec{E} = E_e \vec{e}_x$ laute der Hamiltonoperator in geeignet gewählten Einheiten

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}^2 + \hat{x}^2\right) - qE_e\hat{x}.$$

i. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte!
ii. Berechnen Sie $\langle n|\hat{x}|n\rangle$!

Hinweise:

- Erinnern Sie sich an die Übungen und benutzen Sie $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$!
- In den gewählten Einheiten gilt $m = \hbar = \omega = 1$.

(b) [5 Punkte] **Oszillator mit Wand**
Gegeben sei ein Oszillator, der durch eine Wand begrenzt wird. Das Potenzial nimmt dann folgende Form an:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , x \leq 0, \\ \frac{m\omega^2}{2}x^2 & , x > 0. \end{cases}$$

i. Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung und die Randbedingung bei $x = 0$ auf!
ii. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und -funktionen!
iii. Geben Sie den Grundzustand in Ortsdarstellung und dessen Energie an!

Hinweis:

- Betrachten Sie die Lösungen des Oszillators *ohne* Wand! Welche Lösungen erfüllen die Randbedingung bei $x = 0$, d.h. *mit* Wand?

Aufgabe 2: Näherungsverfahren .... 10 Punkte

Wir betrachten erneut den Oszillator mit Wand (Aufgabe 1.b). Das Potenzial lautet

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , x \leq 0, \\ \frac{m\omega^2}{2}x^2 & , x > 0. \end{cases}$$

Es soll in Ortsdarstellung gearbeitet werden. Der Variationsansatz lautet

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0, \\ Cx\mathrm{e}^{-\alpha x} & , x > 0, \end{cases}$$

mit dem Variationsparameter $\alpha > 0$.

i. Schätzen Sie nach dem Ritz'schen Variationsverfahren die Grundzustandsenergie ab!
   Zwischenergebnis: $\langle H \rangle_{\varphi_\alpha} = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 + \frac{3}{2}m\omega^2\frac{1}{\alpha^2}$.
ii. Vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$! Was bedeutet das Ergebnis für die gewählte Ansatzwellenfunktion $\varphi_\alpha(x)$?

Hinweis:

$$\int_0^\infty q^n \mathrm{e}^{-\gamma q}\,\mathrm{d}q = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}$$

Aufgabe 3: Drehimpuls .... 10 Punkte

Seien $|m\rangle$, $m = -1, 0, 1$ die Eigenzustände von S_z mit Eigenwerten $\hbar m$. Für ein Spin-Eins-Teilchen werden die Spinoperatoren dargestellt durch

$$S_\mathrm{x} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_\mathrm{y} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ +\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & +\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $|\Psi\rangle := \frac{1}{2}\left(|1\rangle + \sqrt{2}|0\rangle + |-1\rangle\right)$.

i. Was ist der Erwartungswert von S_x im Zustand $|\Psi\rangle$? Was schließen Sie daraus für die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messwerte von S_x im Zustand $|\Psi\rangle$?
ii. Der Hamiltonoperator des Systems sei durch $\hat{H} := \frac{ge}{2Mc}\vec{B}\cdot\vec{S}$ gegeben, wobei das Magnetfeld $\vec{B} = (0,0,B)^\mathrm{T}$ mit $B = \mathrm{const.}$ Schreiben Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ in Spektraldarstellung! Wie lauten seine Eigenwerte? (*Hinweis: Sie benötigen dafür die Eigenwerte des Hamiltonoperators.*)
iii. Wie üblich gilt $|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi\rangle$. Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\Psi\rangle$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung von S_x zum Zeitpunkt $t > 0$ den Wert $+\hbar$ zu messen.