Quantenmechanik Nachtest SS 2014

- **Name und Matrikelnummer:**
- **In welchem Jahr haben Sie die QM-Übungen besucht ?**
- **Sie müssen in jedem Fall das Aufgabenblatt abgeben !**
- Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. **Bitte geben Sie auf *jedem* abgegebenen Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.**
- Zulässige Hilfsmittel: QM-Skriptum, und die eigenen Übungen.
- Bitte geben Sie zu verwendeten Formeln die *Quelle* an, wie zum Beispiel "Aufgabe 21", bzw. "Gl.(2.34)".

Aufgabe 1: Variationsrechnung *(10 Punkte)*

Wir betrachten ein einseitiges eindimensionales Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ -\frac{V_0}{x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Wir wollen dieses Problem mit einem Variationsansatz behandeln, und wählen dazu die Versuchswellenfunktion

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ Axe^{-\alpha x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

a) Berechnen Sie die Normierungskonstante A.

b) Wie lautet der volle Hamiltonoperator $\hat{H}$ des Problems in Ortsdarstellung?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie, $\langle E_\alpha \rangle = \frac{\langle \psi_\alpha | \hat{H} | \psi_\alpha \rangle}{\langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle}$. Bestimmen sie α, sodass die Energie minimal wird.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortsoperators $\langle \hat{Q} \rangle$ bezüglich der optimierten Wellenfunktion.

Hinweis: Sie werden Integrale der Form $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ benötigen.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator *(10 Punkte)*

Es sein ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Masse m und der Frequenz ω gegeben. Die Zustände $|n\rangle$ mit $n = 0, 1, 2, ...$ sind die normierten Eigenzustände. Betrachten Sie nun den Zustand

$$|\psi\rangle = \cos\phi|0\rangle + \sin\phi|2\rangle. \tag{3}$$

a) Verifizieren Sie, dass der Zustand $|\psi\rangle$ normiert ist.

b) Geben Sie $|\psi(t)\rangle$ an. Sie benötigen dazu den Zeitentwicklungsoperator.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}\rangle$ im Zustand $|\psi(t)\rangle$. Für welche ϕ ist der Erwartungswert zeitunabhängig?

Aufgabe 3: Potentialtopf mit Störung *(10 Punkte)*

Ein Teilchen befindet sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf mit Breite L, der jedoch auf der halben Breite um den Betrag λV_1 abgesengt ist. Das Potential ist also

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x \leq 0 \\ -\lambda V_1 & \text{für} \quad 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{L}{2} < x \leq L \\ \infty & \text{für} \quad x > L \end{cases} \tag{4}$$

a) Die Absenkung um λV_1 soll als Störung betrachtet werden. Skizzieren Sie das Potential für den ungestörten Fall ($\lambda = 0$) und für den gestörten Fall ($\lambda > 0$). Geben Sie die Hamiltonoperatoren H_0 (ungestört) und H_1 (Störung) an.

b) Geben Sie für das ungestörte System die exakten Eigenenergien und Eigenzustände inklusive Normierung an.

c) Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung für die Zustände n.

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Ortsoperators $\langle\hat{Q}\rangle$ für den *ungestörten* Hamiltonoperator H_0.
Das Folgende soll nun mit Worten argumentiert werden (keine explizite Rechnung): Wird sich dieser Erwartungswert durch die Störung H_1 verändern? Wenn ja, in welche Richtung? Für die Argumentation hilft es, sich den Fall für sehr große λ zu überlegen.

$$\int \sin^2(\phi)d\phi = \frac{1}{2}\left(\phi - \sin(\phi)\cos(\phi)\right), \quad \int \phi\sin^2(\phi)d\phi = \frac{\phi^2}{4} - \frac{1}{8}\cos(2\phi) - \frac{1}{4}\phi\sin(2\phi)$$