Quantenmechanik Klausur **SS 2012**

- **Name und Matrikelnummer:** [redacted]
- **Jahrgang des verwendeten QM-Skriptums:** SS 2007
- **In welchem Jahr haben Sie die QM-Übungen besucht ?** 2012
- **Sie müssen in jedem Fall das Aufgabenblatt abgeben !**
- Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. **Bitte geben Sie auf *jedem* abgegebenen Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.**
- Zulässige Hilfsmittel: QM-Skriptum und die eigenen Übungen.
- Bitte geben Sie zu verwendeten Formeln die *Quelle* an, wie zum Beispiel "Aufgabe 21", bzw. "Gl.(2.34)".

Aufgabe 1: Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen im Magnetfeld

Ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen passiert einen Stern-Gerlach Filter, der so justiert ist, dass er nur Teilchen mit Spin $+z$ durchlässt. Direkt nach diesem Filter ist ein Magnetfeld der Stärke B in x-Richtung angelegt.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator für das Teilchen an, nachdem es den Filter passiert hat $(t = 0)$.

b) Wie lauten der Zeitentwicklungsoperator? Wie lautet der Zustand des Teilchens nach der Zeit $t = \tau$?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei Messung von $\hat{S}_z$ zur Zeit $t = \tau$ den Wert $-\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten?

d) Für welche Zeiten τ_n wird die Wahrscheinlichkeit, den Spin $-z$ zu messen, gleich eins?

Aufgabe 2: Unendlicher tiefer Potentialtopf mit Störung

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer eindimensionalen Potentialbox der Form (siehe Abb. 1):

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad |x| > 3a \\ 0 & \text{für} \quad a < x < 3a \\ 0 & \text{für} \quad -3a < x < -a \\ \lambda V_0 & \text{für} \quad -a < x < a \end{cases}$$

wobei $\lambda, V_0 \in \mathbb{R}^+$ und $\lambda \ll 1$.

Betrachten Sie den Potentialteil mit V_0 als Störung zum flachen Potentialtopf der Länge $6a$.

b) Wie lauten die Eigenzustände und Eigenenergien des ungestörten Systems?

c) Bestimmen Sie mittels Störungsrechnung die Energiekorrektur 1. Ordnung des Grundzustandes.

d) Geben Sie formal die Vektorkorrektur 1. Ordnung bzgl. des Grundzustandes sowie die Energiekorrektur 2. Ordnung bzgl. des Grundzustandes an. Vereinfachen Sie soweit wie möglich, ohne die Integrale jedoch explizit auszuführen.

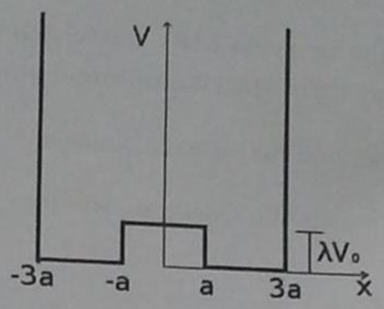

Abbildung 1: Skizze des Potentials aus Aufgabe 2.

Aufgabe 3: Variationsrechnung in einer Dimension.

Der Hamiltonoperator eines anharmonischen linearen Oszillators sei durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{Q}^2 + \frac{m^2\omega^3}{10\hbar}\hat{Q}^4$$

gegeben, wobei $m, \omega, \hbar$ reelle Konstanten und $\hat{P}, \hat{Q}$ den Impuls- bzw. Ortsoperator beschreiben.

a) Führen Sie eine Variationsrechnung für dieses System mit folgender Wellenfunktion durch

$$u_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2} \qquad , x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}^+ .$$

Die charakteristische Gleichung für α muss nicht explizit gelöst werden.

b) Der Energieerwartungswert der in Punkt a) gefundenen Wellenfunktion ergibt sich zu $E_{\alpha_0} \approx 0.5603\ \hbar\omega$ Welche Aussagen lassen sich über die exakte Grundzustandsenergie treffen?

Hilfreiche Formeln:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), \qquad \int_b^c \sin^2(a\,x)dx = \frac{2a(c-b) + \sin(2ab) - \sin 2ac}{4a}$$

$$\int_0^\infty d\xi\, \xi^{2n} e^{-\beta\xi^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n! \beta^n}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \qquad , \beta \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}_0 .$$