Quantenmechanik Klausur

SS 2011

- Name und Matrikelnummer:
- Jahrgang des verwendeten QM-Skriptums:
- In welchem Jahr haben Sie die QM-Übungen besucht ?
- Sie müssen in jedem Fall das Aufgabenblatt abgeben !
- Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. **Bitte geben Sie auf _jedem_ abgegebenen Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.**
- Zulässige Hilfsmittel: QM-Skriptum, und die eigenen Übungen.
- Bitte geben Sie zu verwendeten Formeln die *Quelle* an, wie zum Beispiel "Aufgabe 21", bzw. "Gl.(2.34)".

Aufgabe 1: Spinpräzession im Heisenbergbild *(8 Punkte)*

Ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ befindet sich in einem Magnetfeld, welches in x-Richtung zeigt. Der Hamiltonoperator sei $\hat{H} = -\mu B \hat{S}_x$.

a) Wie ist der zeitabhängige Heisenberg-Operator $\vec{S}^H(t)$ definiert?

b) Berechnen Sie $\vec{S}^H(t)$ in der z-Basis mit Hilfe der Beziehung

$$e^{-i\frac{\varphi}{2}\vec{n}\vec{\sigma}} = \mathbb{1}\cos\frac{\varphi}{2} - i(\vec{n}\vec{\sigma})\sin\frac{\varphi}{2}$$

sowie $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$. Lassen Sie dabei die Pauli-Matrizen symbolisch $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, stehen (d.h. nicht als 2×2 Matrizen anschreiben).

c) Schreiben Sie nun $\vec{S}^H(t)$ in Abhängigkeit von $\vec{S}^H(0)$ (d.h. in Operator-Form, ohne Pauli-Matrizen). Dies kann man tun, da die Pauli-Matrizen linear unabhängig sind. Das Ergebnis ähnelt sehr dem Ergebnis des Kapitels 3.3.3 (Spinpräzession) der Vorlesung.

Hinweise: $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$; $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

Aufgabe 2: Unendlicher tiefer Potentialtopf *(8 Punkte)*

Ein Teilchen der Masse M befinde sich einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite L ($-L/2 < x < L/2$). Zur Zeit $t = 0$ ist die normierte Wellenfunktion gegeben durch

$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{8}{5L}}\cos\frac{\pi x}{L} + \sqrt{\frac{2}{5L}}\sin\frac{2\pi x}{L}.$$

a) Verifizieren Sie, dass die folgenden normierten Wellenfunktionen u_m Eigenzustände des ungestörten Systems sind:

$$\text{symmetrisch:} \quad u^s_m(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{L}x\right) & \text{mit } m = 0, 1, \ldots \quad , \ |x| \le \frac{L}{2} \\ 0 & \qquad\qquad\qquad\quad , \ |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$

[illegible] $\begin{cases} \text{[illegible]} & \text{[illegible]} , \ |x| \le \frac{L}{2} \\ 0 & , \ |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$

b) Schreiben Sie $\psi(x,0)$ als Linearkombination von Eigenzuständen des Systems.

c) Bestimmen Sie die Wellenfunktion zu späteren Zeiten t.

d) Berechnen Sie die Energie des Teilchens.

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t in der rechten Hälfte des Topfes zu finden? Formulieren Sie das Integral, ohne die Wahrscheinlichkeit konkret zu berechnen.

Hinweise: (i) Die Energieeigenwerte nehmen für $n = 2m + 1$ bzw. $n = 2m$ die aus dem Skriptum bekannte Form an. (ii) $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta)$, $\cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha = \cos(\alpha+\beta)$

Aufgabe 3: Variationsrechnung in einer Dimension. *(8 Punkte)*

Der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators in atomaren Einheiten (d.h. $m = \hbar = 1$) ist

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{2}x^2$$

Wir möchten über einen Variationsansatz den Grundzustand des Systems ermitteln.

(a) Begründen Sie, warum von den folgenden Ansätzen

$$\phi_0 = \begin{cases} Ce^{-\alpha x^2} & (I) \\ Ce^{-\alpha x} & (II) \\ Ce^{-\alpha|x|} & (III) \end{cases}$$

nur der erste (I) einen gebundenen Zustand mit physikalisch sinnvollen Eigenschaften darstellen kann. Welche Zusatzbedingung muss der Parameter α dabei erfüllen? Skizzieren Sie dazu die Versuchswellenfunktionen $(I)-(III)$.

(b) Bestimmen Sie ausgehend von dem Ansatz $\phi_0(x) = C\exp(-\alpha x^2)$ jenes α, für das der Erwartungswert der Energie minimal wird.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie im optimierten Zustand.

(d) Vergleichen Sie die erhaltene Grundzustandwellenfunktion und deren Energie mit dem exakten Ergebnis (s. Vorlesung).

Hinweise: Beachten Sie die Symmetrie des Potentials. Die auftretenden Integrale können auf folgende Gaußintegrale zurückgeführt werden

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, u^2 e^{-\beta u^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-\beta u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$