Aufgabe 1.1: Unendlich tiefer Potentialtopf

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-a/2, a/2)\,, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

a) Bringen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\psi(x,t)$$

in die Form eines Eigenwertproblems und erklären Sie, wie man aus deren Lösungen eine allgemeine Lösung der Schrödingergleichung erhält. 5 Punkte

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenzustände des Eigenwertproblems.

Hinweis: Es gilt: $\int \mathrm{d}x\, \cos^2 x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$, $\int \mathrm{d}x\, \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$. 5 Punkte

c) Das Teilchen sei nun zunächst in einem Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-a/2, 0)\,, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Potential instantan auf die Form des Potentials in Gleichung (1) geändert. Beschreiben Sie mathematisch, wie sich das Teilchen im geänderten Potential für einen beliebigen Anfangszustand $\psi(x, t < 0)$ verhält und benennen Sie Besonderheiten im Vergleich zum allgemeinen Fall aus Aufgabe 1.1a. Wie sieht die Wellenfunktion für $t > 0$ aus, wenn das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand des Potentials in Gleichung (2) war?

Hinweis: Greifen Sie nur auf Ergebnisse aus Teilaufgaben 1.1a und 1.1b zurück. 5 Punkte

Aufgabe 1.2: Doppel-δ-Potential

Betrachten Sie für $V_0 < 0$ den eindimensionalen Hamilton-Operator der Form

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V_0\delta(x - x_0) + V_0\delta(x + x_0)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Anschlussbedingungen der Eigenzustände und deren Ableitungen an den Stellen $\pm x_0$. 3 Punkte

b) Machen Sie einen geeigneten Ansatz für die gebundenen Eigenzustände von $\hat{H}$ mit Eigenwerten $E < 0$. Zeigen Sie, dass man dann folgende transzendente Gleichungen für die Eigenenergien erhält:

$$\kappa\left[1 + \tanh(\kappa x_0)\right] = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}, \qquad \kappa\left[1 + \coth(\kappa x_0)\right] = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}.$$

Hierbei ist $\kappa^2 = 2m|E|/\hbar^2$, was ebenso zu begründen ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Problems. 8 Punkte

c) Lösen Sie die transzendenten Gleichungen graphisch. Stellen Sie die Bedingung dafür auf, dass mindestens zwei gebundene Eigenzustände existieren.

Hinweis: Schauen Sie sich das Verhalten für kleine κ genauer an. 4 Punkt

7.
7.1