3. Prüfung zur Übung Quantenmechanik, SS 2021

Entartete Störungstheorie, Drehimpulse

Um Ihnen die Bearbeitung zu erleichtern, ist diese Aufgabe in kleine Teilschritte aufgeteilt. Ein quantenmechanisches System sei vollständig durch die (Bahn-)Drehimpulsbasis $|l, m\rangle$ mit $l = 0, 1, 2, \cdots, \infty$ beschrieben. Sein Hamiltonoperator laute

$$\hat{H}_0 \;=\; \alpha\, \hat{\vec{L}}^{\,2} \qquad\qquad \alpha > 0$$

a) (1P) Wie lautet allgemein die Eigenwertgleichung zu $\hat{\vec{L}}^{2}$?

b) (1P) Was ist der Grundzustand von $\hat{H}_0$? Welche Energie hat er ?

c) (1,5P) Was sind die ersten angeregten Zustände ? Welche Energie haben Sie ? Wie groß ist die Entartung ?

Betrachten Sie nun eine Störung

$$\lambda \hat{H}_1 \;=\; \lambda \left(\hat{L}_+^2 + \hat{L}_-^2 \right)$$

Hinweis: der Vorfaktor bei der Wirkung von $\hat{L}_\pm$ auf $|l, m\rangle$ lautet $\hbar\sqrt{(l(l+1) - m(m \pm 1)}$.

Wir berechnen den Effekt der Störung im Raum der Zustände zu $l = 1$ und müssen dazu das in der Vorlesung eingeführte $\hat{\tilde{H}}_0 = \hat{H}_0 + \hat{P}\,\lambda\hat{H}_1\,\hat{P}$ diagonalisieren.

d) (1P) Aus der Struktur von $\hat{H}_1$ kann man erkennen, das seine Wirkung auf einen der $l = 1$ Eigenzustände von $\hat{H}_0$ Null ergibt. *Bei welchem Zustand ist das der Fall? Warum?* Dieser Zustand ist deswegen auch schon ein Eigenzustand zu $\hat{\tilde{H}}_0$ und Sie brauchen ihn im Folgenden nicht mehr zu berücksichtigen.

Rechnen Sie im Folgenden nur noch im Raum, der von den beiden verbleibenden Zustände aufgespannt wird.

e) (3P) Berechnen Sie die Wirkung von $\hat{H}_1$ auf die beiden verbleibenden Zustände. Liegen die Ergebnisse wieder im besagten Raum ?

f) (1,5P) Geben Sie in der Basis der verbleibenden Zustände die zu $\hat{H}_1$ gehörige Matrix an. Was sind die Eigenwerte von $\hat{H}_1$ im Raum dieser beiden Zustände ?

g) (1P) $\hat{H}_0$ ist im Raum der beiden Zustände entartet, d.h. proportional zum Einheitsoperator. Die Eigenzustände von $\hat{H}_1$ sind in diesem Raum daher auch Eigenzustände von $\hat{H}_0$ und somit auch von $\hat{\tilde{H}}_0$. Geben Sie die daraus folgenden beiden Eigenenergien von $\hat{\tilde{H}}_0$ an. (Wenn Ihnen die Ergebnisse von f) fehlen, schreiben Sie, was zu rechnen wäre).