Übung zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2021
2. Prüfungsaufgabe

Ein kohärenter Zustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist als rechtsseitiger Eigenzustand des nicht-hermiteschen Vernichtungsoperators a definiert: $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, wobei der Eigenwert λ eine beliebige komplexe Zahl ist.

(a) Zeigen Sie, dass

$$|\lambda\rangle \;=\; e^{-|\lambda|^2/2}\, e^{\lambda a^\dagger}\, |0\rangle \tag{1}$$

die o.a. definierende Eigenschaft eines kohärenten Zustands erfüllt.

Benutzen Sie dazu die Darstellung $|n\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\, |0\rangle$ und die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion.

(b) Berechnen Sie für einen normierten kohärenten Zustand $|\lambda\rangle$ die Unschärfe des Ortsoperators $\hat{Q} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\big(a^\dagger + a\big)$.

(c) Zeitentwicklung: Zeigen Sie, dass $|\lambda(t)\rangle \;=\; e^{-i\frac{\omega}{2}t}\, |\lambda e^{-i\omega t}\rangle$, indem Sie den Zeitentwicklungsoperator des harmonischen Oszillators auf $|\lambda\rangle$ anwenden. Benutzen Sie dazu die Darstellung $|\lambda\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\, |n\rangle$.