# Übung zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2025
# 3. Prüfungsaufgabe

### Aufgabe 1

Betrachten Sie einen semiisotropen Körper mit Trägheitsmomenten $I_z$ und $I_{xy}$. Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2I_{xy}} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_z},$$

wobei $\hat{L}_i$ der Drehimpulsoperator in $i$-Richtung ist. Des Weiteren bezeichnen wir $\hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$.

(a) (1P) Zeigen Sie, dass die Kommutatoren des Hamiltonoperators mit $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ verschwinden, *d.h.* $[\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2] = 0$ und $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$.*

(b) (2P) Bestimmen Sie die Eigenwertgleichung für die Energien des Systems und zeigen Sie, dass die Energien wie folgt geschrieben werden können:

$$E_{lm} = \frac{\hbar^2}{2I_{xy}}\left(l^2 + l - m^2\right) + \frac{\hbar^2}{2I_z}m^2,$$

wobei $l$ und $m$ die Drehimpuls– bzw. magnetischen Quantenzahlen sind.

(c) (1P) Listen Sie die entarteten Zustände $|l, m\rangle$ bei $l = 1$ auf.

(d) (2P) Betrachten Sie den isotropen Fall, in dem $I_{xy} = I_z = I$. Finden Sie einen Ausdruck für die Energie und bestimmen Sie die zugehörige Entartung.

### Aufgabe 2

Betrachten Sie den Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle + |1, 1\rangle)$, wobei die Zustände $|l, m\rangle$ die gleichzeitigen Eigenzustände von $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit den Quantenzahlen $l$ und $m$ bezeichnen.

(a) (2P) Berechnen Sie den Erwartungswert der $x$-Komponente des Drehimpulses, $\langle \hat{L}_x \rangle$, im Zustand $|\psi\rangle$.**

(b) (2P) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$ und die Varianz $\Delta \hat{L}_x^2 = \langle \hat{L}_x^2 \rangle - \langle \hat{L}_x \rangle^2$ im Zustand $|\psi\rangle$.

---

*Die folgende Identität könnte nützlich sein: $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.

**Hinweis: Verwenden Sie die Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, für die unter den üblichen Bedingungen die Beziehungen $\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\,|l, m \pm 1\rangle$ gelten.