2. Prüfungsaufgabe

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit der Masse m in einem Potential $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, wobei die Frequenz ω eine reellwertige Konstante ist. Die Leiteroperatoren sind gegeben durch

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{Q} + i\frac{\hat{P}}{m\omega}\right) \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{Q} - i\frac{\hat{P}}{m\omega}\right),$$

wobei $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ die Orts- bzw. Impulsoperatoren sind. Die Eigenzustände des harmonischen Oszillators werden mit $|\psi_n\rangle$ bezeichnet, wobei n die Quantenzahl ist.

(a) (2P) Bestimmen Sie die Wellenfunktion des Grundzustands im Ortsraum, $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$, indem Sie die Gleichung $\hat{a}|\psi_0\rangle = 0$ lösen. Die Normalisierungskonstante A_0 brauchen Sie *nicht* explizit zu berechnen.

(b) (2P) Berechnen Sie die Ortsraum-Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands, gegeben durch $|\psi_1\rangle = A_1\hat{a}^\dagger|\psi_0\rangle$. Sie brauchen A_1 nicht explizit zu berechnen.*

(c) (2P) Zeigen Sie, dass die Energieniveaus E_n, die den Eigenzuständen $|\psi_n\rangle$ entsprechen, durch $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ gegeben sind.**

(d) (2P) Betrachten Sie den Zustand $|\Psi\rangle = \frac{24}{25}|\psi_0\rangle + \frac{7}{25}|\psi_1\rangle$. Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie $\hat{T} = -\frac{\hbar\omega}{4}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2$ im Zustand $|\Psi\rangle$.

Bei $x = 0$ wird eine undurchdringliche Wand eingeführt, die das Teilchen auf den positiven x-Raum beschränkt. Das Potential dieses harmonischen Halbraumoszillators ist gegeben durch

$$V'(x) = \begin{cases} \frac{m\omega^2 x^2}{2} & x > 0 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Eigenfunktionen dieses Oszillators werden bezeichnet durch $|\varphi_m\rangle$ mit $m \in \{0, 1, \ldots\}$.

(e) (2P) Was sind die Energieniveaus E_m des harmonischen Halbraumoszillators? Erläutern Sie Ihre Antwort.***

---

*Falls Sie Teil (a) nicht lösen konnten, verwenden sie $\psi_0(x) = A_0/(1 + \frac{m\omega x^2}{2\hbar})$ (das ist nicht die Lösung von (a), damit kann aber weitergerechnet werden).

**Halbe Punkte, wenn Sie dies nur für $n = 0$ und $n = 1$ zeigen.

***Beachten Sie, dass die Antwort ausschließlich auf Grundlage der Wellenfunktionen im Ortsraum und ihrer entsprechenden Energien abgeleitet werden kann.