

Übung zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2025

1. Prüfungsaufgabe

Stellen Sie sich ein System vor, in dem es nur zwei linear unabhängige Zustände gibt:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der allgemeinste Zustand ist eine normalisierte lineare Kombination:

$$|S\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Der Hamiltonoperator kann als hermitesche Matrix ausgedrückt werden. Angenommen, er hat die spezifische Form

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix},$$

wobei h und g reelle Konstanten sind.

- (a) (2P) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung $\hat{H}|s\rangle = E|s\rangle$ für die Energie E .
- (b) (2P) Finden Sie die normalisierten Eigenvektoren $|s_+\rangle$ und $|s_-\rangle$ des Hamilton-Operators $\hat{H}$.

Nehmen Sie an, dass das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|S(0)\rangle = |a\rangle$ startet.

- (c) (2P) Drücken Sie den Zustand $|S(0)\rangle$ mithilfe der Eigenvektoren $|s_{\pm}\rangle$ des Hamilton-Operators aus.
- (d) (2P) Zeigen Sie, dass der zeitabhängige Zustand wie folgt geschrieben werden kann

$$|S(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} \cos \frac{gt}{\hbar} \\ -i \sin \frac{gt}{\hbar} \end{pmatrix}.$$

- (e) (2P) Betrachten Sie die Observable $\hat{A} = |s_+\rangle\langle s_-| + |s_-\rangle\langle s_+|$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle S(t)|\hat{A}|S(t)\rangle$ als Function der Zeit.

