Name [redacted]
Matrikelnr: [redacted]

Vorlesungsprüfung Theoretische Mechanik. 7. Mar. 2024

Geben Sie deutlich bei jeder Antwort die Bezeichnung des zugehörigen Unterpunkte an (z.B.: "(3b):$\cdots$").
Alle Antworten zum selben Thema (Zahl (z.B.:3)) müssen zusammen stehen und von anderen Themen durch einen horizontalen Strich getrennt werden. Widersprüchliche oder unverständliche Antworten werden als falsch bewertet.
Wenn Sie eine Variable (Größe) verwenden, die nicht in den Angaben ist und noch nicht definiert wurde, müssen Sie diese als Funktion der angegebenen Variablen (und ggf. Zeitableitungen) definieren (ausg., t, c, g).

Wenn nicht anders angegeben, zählt jeder Unterpunkt einen Punkt.
Handy ausschalten und in Handtasche/Rucksack stecken

1. **Symmetrien**
(0.5 Punkte pro korrekte Antwort. **Alternative: siehe unten**)
Markieren Sie mit einem "X" jene Größen, die bei den jeweiligen Lagrangefunktionen erhalten (also Konstanten der Bewegung) sind.
Hinweis: $a > 0, b > 0$ sind Konstanten und $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ die Ortskoordinate.

	Energie	Impuls
$\mathcal{L} = a\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 + b\,(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z})$	[redacted]	[redacted]
$\mathcal{L} = a\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 + b\,(x + y + z)$	[redacted]	[redacted]
$\mathcal{L} = a\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)^2 + b/\lvert\boldsymbol{r}\rvert$	[redacted]	[redacted]
$\mathcal{L} = a\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 + b\,\lvert\boldsymbol{r}\rvert^2 \sin(a\,t)$	[redacted]	[redacted]
$\mathcal{L} = \dot{\boldsymbol{r}}^2\,(a + b\,\cos(a\,t))$	[redacted]	[redacted]
$\mathcal{L} = a\,\dot{\boldsymbol{r}}^2$	[redacted]	[redacted]

Alternative:(Max 4 Punkte und keinen Punkt aus der Tabelle, wenn Sie auf diese Frage eingehen): Unter welchen Transformationen muss die Lagrange-Funktion invariant sein, damit die o.g. Größen jeweils erhalten sind?

2. **Lagrange**
Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens mit Masse m auf der Oberfläche eines Zylinders mit Radius R und Hauptachse in z-Richtung. Die konstante Gravitationskraft wirke in die (negative) z Richtung.

   (a) Schreiben Sie die Zwangsbedingungen für die kartesischen Koordinaten (x, y, z).

   (b) Welche verallgemeinerten Koordinaten (VK) kann man verwenden? Schreiben Sie (x, y, z) als Funktion der VK.

   (c) Schreiben Sie die Geschwindigkeitskomponenten $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ als Funktion dieser VK.

   (d) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion. Welche VK sind zyklisch ?

   (e) Schreiben Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen für die nicht-zyklische Koordinate.

   (f) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion (mit den richtigen Variablen!).

3. **Das abgeschlossene n-Teilchen System**
Betrachten Sie ein abgeschlossenes System (also ohne externe Kräfte) aus n Teilchen mit Koordinaten $\boldsymbol{r}_i$ und Massen m_i ($i = 1, \cdots, n$). Die Potentialenergie zwischen Teilchen i und Teilchen j sei $U(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$.
Schreiben Sie den Ausdruck für [1]

   (a) die kinetische und potentielle Energien
   (b) die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $\dot{\boldsymbol{R}}$
   (c) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für die Koordinate $\boldsymbol{r}_n$ des n-sten Teilchens
   (d) Sei T^S die gesamte kinetische Energie im Bezugssystem des Schwerpunktes (also im System wo $\dot{\boldsymbol{R}} = 0$). Schreiben Sie den Ausdruck für die gesamte kinetische Energie T im Laborsystem (wo $\dot{\boldsymbol{R}} \neq 0$) als Funktion von T^S, den Massen und $\dot{\boldsymbol{R}}$.

4. **Lorentz-Transformation**
Betrachten Sie zwei Inertialsysteme S und S', wobei S' sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_3$ gegenüber S bewegt. Benutzen Sie $c = 1$.

   (a) (2P) Schreiben Sie explizit die vier Komponenten (x_0, x_1, x_2, x_3) des Zeit-Ort Vierervektors in S in Abhängigkeit von den vier Komponenten x'_μ in S'.
   (b) (2P) Dasselbe für die vier Komponenten (K_0, K_1, K_2, K_3) der Viererkraft in Abhängigkeit von den K'_μ.

5. **Starrer Körper**
   (a) Drücken Sie die Rotationsenergie eines starren Körpers T_{rot} in Abhängigkeit von den Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit (ω_i) und des Trägheitstensors (I_{ij}) aus.
   (b) Gleiches für L_1 (die $i = 1$ Komponente des Drehimpulses)

   Der Trägheitstensor sei von nun an (Punkte c,d) diagonal mit Hauptträgheitsmomente Θ_i.
   Die Eulergleichungen für einen starren Körper ohne externen Kräften lauten (wir lassen den Symbol $^{(K)}$ für das körperfeste System weg)

$$\Theta_1\,\dot{\omega}_1 + \omega_2\,\omega_3\,(\Theta_3 - \Theta_2) = 0$$

   und zyklische Permutationen $1 \to 2 \quad 2 \to 3 \quad 3 \to 1$.

   (c) Bestimmen Sie beim symmetrischen Kreisel ($\Theta_1 = \Theta_2$) die Bewegungsgleichung für $\omega_3(t)$ (im Körperfesten System) und dessen (allgemeine) Lösung
   (d) Gleiches für $\omega_1(t)$ und $\omega_2(t)$.

---

[1] Wenn Sie das Summenzeichen verwenden, schreiben Sie explizit, über welche Indexbereiche summiert wird. Z.B. $\sum\limits_{i \neq j = 1}^{n}$. Achtung, die Kräfte sind nicht gegeben, deren Ausdruck müssen Sie selber korrekt schreiben. Beim Gradienten spezifizieren Sie die Variable, z.B. $\boldsymbol{\nabla}_j$, $\boldsymbol{\nabla}_3$, etc.