Name:

Matrikelnr:

Vorlesungsprüfung Theoretische Mechanik. 13. Feb. 2024

Geben Sie deutlich bei jeder Antwort die Bezeichnung des zugehörigen Unterpunkte an (z.B.: "(3b):···").
Alle Antworten zum selben Thema (Zahl (z.B.:3)) müssen zusammen stehen und von anderen Themen durch einen horizontalen Strich getrennt werden.
Widersprüchliche oder unverständliche Antworten werden als falsch bewertet.
Wenn Sie eine Variable (Größe) verwenden, die nicht in den Angaben ist und noch nicht definiert wurde, müssen Sie diese als Funktion der angegebenen Variablen (und ggf. Zeitableitungen) definieren (ausg., t, c, g).

In der Regel reicht für jede Antwort eine Formel oder ein kurzer Satz (ausser anders angegeben).
Wenn nicht anders angegeben, zählt jeder Unterpunkt einen Punkt.
Handy ausschalten und in Handtasche/Rucksack stecken

1. **Newtonsche Mechanik**
   Ein Massenpunkt bewege sich unter dem Einfluss einer Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Welche Zusatzbedingungen (Formel) **muss diese Kraft erfüllen,** damit generell [1]

   (a) Ein Potential existiert

   (b) Der Drehimpuls erhalten ist

   (c) Der Impuls erhalten ist

   (d) Der Flächensatz erfüllt ist

   (e) Die Bahn auf einer Ebene beschränkt ist

   (f) Im Fall, dass das Potential $U(\boldsymbol{r})$ existiert Schreiben Sie $U(\boldsymbol{r})$ als Funktion von $\boldsymbol{F}$ (also $U(\boldsymbol{r}) = \cdots$)

2. **Trägheitstensor, Trägheitsmoment, Rotationen**

   (a) Schreiben Sie die Formel für den Trägheitstensor $\boldsymbol{I}$ (alle Komponente) für eine kontinuierliche Massenverteilung.

   (b) Sei Θ_3 das Trägheitsmoment eines Zylinders mit Masse M, Radius R und Höhe H für Drehungen um seine Symmetrieachse $\boldsymbol{e}_3$. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment für Drehungen um eine Achse parallel zu $\boldsymbol{e}_3$, die auf dem Zylindermantel liegt.

   (c) Seien $(\Theta, \Theta, \Theta_3)$ die Trägheitsmomente dieses Zylinders in die Richtung der Achsen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$
   Schreiben Sie die Rotationsenergie T_{rot} für den Fall einer Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω (in Betrag) um folgende Achsen:
   (i) Um die $\boldsymbol{e}_2$-Achse (ii) Um die Achse $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$

   (d) Schreiben Sie den Drehimpuls für diesen beiden Fällen

[1] ggf. unterschiedliche Bedingungen für jeden Unterpunkt. Für jeden Unterpunkt nennen Sie sämtliche notwendigen Bedingungen, selbst wenn diese unter einem anderen Unterpunkt schon genannt wurden. Variablen und Vektoren richtig bezeichnen.

Bitte wenden!

3. **Lagrange und Hamilton**

Die Lagrangefunktion eines Systems mit verallgemeinerten Koordinaten x und y laute:

$$\mathcal{L} = \frac{A^2}{2}\left(\dot{y}^2 + \frac{\dot{x}^2}{y^2 + b^2}\right) + k^2\, y^2$$

   (a) Gibt es zyklische Koordinaten? Wenn ja, welche?

   (b) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse.

   (c) Welche Erhaltungsgröße(n) gibt es? (Formel!)

   (d) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion (mit den richtigen Variablen!).

   (e) Unter welchen Bedingungen ist die Bewegung von y auf einem endlichen Bereich beschränkt ("gebundene Bahn")? **Hinweis:** $\dot{x}$ substituieren, $U_{eff}(y)$ bestimmen und graphisch studieren.

   (f) Bestimmen Sie die Umkehrpunkte.

4. **Relativistischer Impuls**

Ein relativistisches Teilchen mit der (Ruhe-) Masse m habe im Bezugssstem S die Geschwindigkeit $\boldsymbol{w} = w\boldsymbol{e}_1$.[2] Schreiben Sie (Sie können Eihneiten mit $c = 1$ benutzen.)

   (a) die vier Komponenten der Vierergeschwindigkeit u_μ

   (b) die vier Komponenten des Viererimpulses p_μ und die relativistische kinetische Energie T_r

   (c) bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ des Teilchens in einem Bezugssytem S', der sich mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_1$ gegenüber S bewegt.

   (d) Schreiben Sie die vier Komponenten des Viererimpulses p'_μ in S' als Funktion der p_μ.

5. **Harmonischer Oszillator**

Gegeben sei ein gedämpfter harmonischer Oszillator mit Bewegungsgl.

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\, q^2 x = 0$$

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $\gamma > 0$ ($\gamma^2 \neq q^2$)

   (b) Für welchen Fall gibt es Schwingungen? Schreiben Sie für diesen Fall die allgemeine Lösung mit sin und cos-Funktionen.

   Es wirke nun zusätzlich eine Kraft

$$F = m\, f \cos(\omega t)$$

   (c) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung.
   Hinweis: Benutzen Sie $\cos\alpha = \Re e(e^{i\alpha})$

   (d) Bestimmen Sie die (maximale) Amplitude der Oszillation in der partikulären Lösung

[2] Wenn Sie γ für dieses Beispiel verwenden, müssen Sie diesen definieren. Achtung! evtl. gibt es zwei verschiedene γ: geben Sie denen unterschiedliche Namen