Vorlesungsprüfung Theoretische Mechanik. 16. Oct. 2024

Geben Sie deutlich bei jeder Antwort die Bezeichnung des zugehörigen Unterpunkte an (z.B.: "(3b):···").
Alle Antworten zum selben Thema (Zahl (z.B.:3)) müssen zusammen stehen und von anderen Themen durch einen horizontalen Strich getrennt werden. Widersprüchliche oder unverständliche Antworten werden als falsch bewertet.
Wenn Sie eine Variable (Größe) verwenden, die nicht in den Angaben ist und noch nicht definiert wurde, müssen Sie diese als Funktion der angegebenen Variablen (und ggf. Zeitableitungen) definieren (ausg., t, c, g). Bezeichnen Sie bitte eindeutig Vektoren, beispielsweise durch einen Pfeil. Wenn nicht anders angegeben, zählt jeder Unterpunkt einen Punkt. Handy ausschalten und in Handtasche/Rucksack stecken

1. **Nichtinertiale Bezugssysteme (4P)**
   (a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung eines kräftefreien Teilchens der Masse m in einem nichtinertialen Bezugssystem, welches sich mit konstanter Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ bewegt.
   (b) Nennen Sie die Namen der beiden Scheinkräften in einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotierenden Bezugssystem?
   (c) (2P) Schreiben Sie den Ausdruck (Formel) für diese zwei Kräfte.

2. **Zentralkraftproblem** (7P)
   Betrachten wir das Problem eines Teilchens mit Masse m in einem zeitunabhängigen Potential $U(\boldsymbol{r})$ mit $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ dem Ortsvektor.
   (a) Welche Bedingung soll $U(\boldsymbol{r})$ erfüllen, damit die Kraft zentral ist? (Also: wovon hängt U in diesem Fall ab. Denken Sie an Vektoren vs Skalaren)? Die Kraft sei also von nun an zentral.
   (b) Welche Erhaltungsgrößen gelten in diesem Fall (Bezeichnung **und** Formel)
   (c) Welche von diesen Erhaltungsgrößen sorgt dafür, dass die Bewegung auf einer Ebene bleibt. Wie steht diese Ebene in Bezug zur vektoriellen Ausrichrung dieser Erhaltungsgröße?
   (d) Die Energie und der Drehimpuls sind in Polarkoordinaten ($\rho \equiv |\boldsymbol{r}|, \varphi$)

   $$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^n\dot{\varphi}^2\right) + U(\rho) \qquad L = m\dot{\varphi}\,\rho^k\,.$$

   Welche Werte haben die Exponente n und k?

   Nun soll das Problem auf folgender Weise gelöst werden (falls Sie (d) nicht gelöst haben, verwenden Sie $n = k = 4$)
   (e) Drücken Sie die Energie als Funktion von nur einer der beiden Polarkoordinaten aus. Eliminieren Sie also die andere.
   (f) Diskutieren Sie graphisch die Lösung für den Fall (gleicher n wie oben).

   $$\cancel{U(\rho) = -\frac{\gamma\, m}{\rho^n} + U_0} \qquad U(\rho) = -\frac{\gamma m}{\rho} + U_0$$

Bitte wenden!

Insbesondere, geben Sie eine gebundene und eine ungebundene Bahn an und diskutieren Sie die Umkehrpunkte. Geben Sie auf dem Bild alle wichtige Größen an (Energien, Umkehrpunkte).

(g) Bestimmen Sie unter welchen Bedingungen (Formel) die Bahn gebunden ist. Geben Sie die Bestimmungsgleichung für die Umkehrpunkte an.

3. **Harmonischer Oszillator** (4P)

Gegeben sei ein gedämpfter harmonischer Oszillator mit Bewegungsgl.

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\ q^2 x = 0 \qquad \gamma > 0$$

(a) Bestimmen Sie die zwei unabhängige Lösungen (mit Herleitung: Ansatz, Einsetzen, Bestimmungsgleichung, ohne Grenzfall $\gamma^2 = q^2$).

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung

(c) Für welchen Fall gibt es Schwingungen? Schreiben Sie für diesen Fall die allgemeine Lösung mit sin und cos-Funktionen.

Es wirke nun zusätzlich eine Kraft

$$F = m\ f \cos(\omega t + \phi)$$

(d) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung.
Hinweis: Benutzen Sie $\cos\alpha = \Re e(e^{i\alpha})$

4. **Trägheitstensor, Trägheitsmoment, Rotationen** (3P)

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ_3 eines homogenen Zylinders mit Masse M und Radius R für Drehungen um seine Achse $\boldsymbol{e}_3$ (Es muss berechnet werden. Es reicht nicht aus, die Formel hinzuschreiben)
Hinweis: $\Theta_3 = \int \rho(\boldsymbol{r})(x_1^2 + x_2^2)\ dV$

(b) Seien $(\Theta, \Theta, \Theta_3)$ die Trägheitsmomente dieses Zylinders in die Richtung der Achsen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$
Schreiben Sie die Rotationsenergie T_{rot} für den Fall einer Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω (in Betrag) um folgende Achsen:
(i) Um die $\boldsymbol{e}_1$-Achse (ii) Um die Achse $(0, 1, -1)/\sqrt{2}$

(c) Schreiben Sie den Drehimpuls für diesen beiden Fällen

5. **Lorentz Transformationen** (5P)

(a) Welche größe soll nach den Prinzipien der speziellen Relativitätsthorie konstant (also in allen Inertialsystemen gleich) sein?

(b) (2P) (Sie können ab hier $c = 1$ verwenden)
Seien x_μ die Viererkoordinaten im Inertialsystem S und x'_μ im Inertialsystem S', der sich mit Geschwindigkeit $v\ \boldsymbol{e}_1$ gegenüber S bewegt. Schreiben Sie die Lorentztransformation $S \to S'$ für alle Komponenten (also $x'_\mu = \cdots$).

(c) Schreiben Sie deren Inverse $S' \to S$ (also $x_\mu = \cdots$).

(d) Leiten Sie die Lorentztransformationen $S \to S'$ aus dem Prinzip (a) und aus der Annahme, das zwischen den Koordinaten eine lineare Transformation besteht her. Sie können hier die Koordinaten 2 und 3 vernachlässigen.