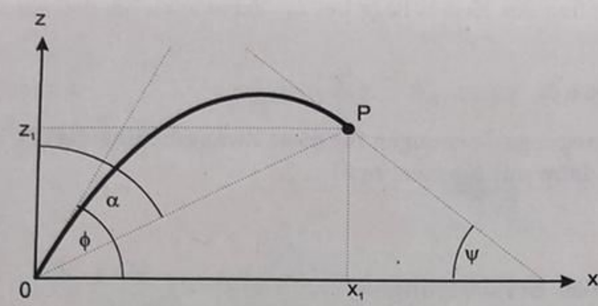
Aufgabe 1.1: Schiefer Wurf mit vorgegebenem Ziel

Ein Massenpunkt wird im homogenen Schwerefeld der Erde vom Ursprung aus mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel ϕ gegen die Horizontale abgeworfen.



a) Wie muss v_0 in Abhängigkeit von ϕ gewählt werden, damit ein vorgegebener Punkt P mit den Koordinaten (x_1, z_1) getroffen wird? Welchen Bereich darf der Winkel ϕ dabei maximal abdecken, wenn $x_1 > 0$ und $z_1 > 0$? Wie verhält sich die zugehörige Flugdauer?

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Abschussgeschwindigkeit minimal wird, wenn für den zugehörigen Winkel $\tan 2\phi = -x_1/z_1$ gilt. Wie groß ist diese Minimalgeschwindigkeit? Wie lange ist der Massenpunkt dann unterwegs?

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehungen $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$, $1+\cos 2\phi = 2\cos^2\phi$ und $\tan 2\phi = 2\tan\phi/\left(1-\tan^2\phi\right)$. Ergebnis: $v_{0,\min}^2 = g\left(z_1 + \sqrt{x_1^2+z_1^2}\right)$.

(3 Punkte)

c) Der Winkel zwischen der Vertikalen und der Sichtlinie vom Ursprung zu P sei α. Zeigen Sie, dass α für den Fall minimaler Abschussgeschwindigkeit durch die Abschussrichtung gerade halbiert wird, also dass $\alpha = 2\left(\pi/2 - \phi\right)$ gilt.

(2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit beim Auftreffen am Punkt P und den Auftreffwinkel ψ. Für welchen Abwurfwinkel gilt $\psi = 0$ und wie sieht dann die horizontale Geschwindigkeit bei P aus?

(2 Punkte)

Aufgabe 1.2: Harmonisches Zentralpotential

Gegeben sein ein Massenpunkt mit Masse m in einem Potential der Form $V(r) = kr^2/2$ mit r als Abstand des Massenpunktes zum Ursprung.

a) Begründen Sie über die Symmetrien, welche Größen erhalten sind. Welche Koordinaten verwendet man hier idealerweise? Drücken Sie die Erhaltungsgrößen in diesen Koordinaten aus und führen Sie das dreidimensionale Problem auf ein effektives eindimensionales Problem zurück. Beschreiben Sie qualitativ mögliche Bahnkurven, ohne das Problem exakt zu lösen.

(4 Punkte)

Bitte wenden!

1.

b) Zusätzlich liege nun ein homogenes Schwerefeld $-g\mathbf{e}_z$ an. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen. Welche Gleichgewichtslage z_0 nimmt das System bezüglich der z-Achse ein? Führen Sie nun eine neue Koordinate $\zeta = z - z_0$ ein und drücken die Lagrange-Funktion in dieser neuen Koordinate aus. Inwiefern ändern sich nun die Bahnkurve im Vergleich zu Teilaufgabe (a) qualitativ, wenn man diese auf Ebenen mit $z = z_0$ beschränkt?

(4 Punkte)

c) Die Bewegung des Massenpunktes sei nun auf die Oberfläche eines Kegels mit Öffnungswinkel 2θ eingeschränkt. Die Spitze des Kegels liege bei z_0. Verwenden Sie die generalisierte Koordinaten ρ und ϕ mit

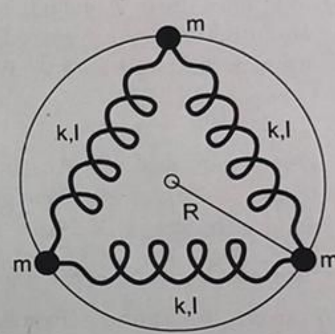
$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi, \qquad z = z_0 + \rho\cot\theta,$$

und leiten Sie die Bewegungsgleichungen für diese Zwangsbedingung ab. Welche Winkelgeschwindigkeit ω ergibt sich dann auf Kreisbahnen?

(2 Punkte)

Aufgabe 1.3: Gekoppelte Schwingungen

Gegeben seien drei identische Massenpunkte mit Masse m, welche auf einer Kreisbahn mit Radius R reibungsfrei gleiten können und durch drei identische Federn mit Federkonstante k und Ruhelänge l verbunden sind (Skizze).



a) Drücken Sie die Position jeder Masse in Zylinderkoordinaten als $\mathbf{r}_i = (R\cos\phi_i, R\sin\phi_i, 0)$ $(i = 1,2,3)$ aus und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichungen.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$ und $\cos x = 1 - 2\sin^2 x/2$.

(3 Punkte)

b) Subtrahieren Sie nun die Bewegungsgleichungen geeignet, um ein Differentialgleichungssystem für folgende Variablen zu erhalten:

$$\theta_{21} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}, \qquad \theta_{32} = \frac{\phi_3 - \phi_2}{2}, \qquad \theta_{13} = \frac{\phi_1 - \phi_3}{2}.$$

Welche Ruhelänge muss die Feder haben, damit bei der maximal symmetrischen Massenverteilung aus der Abbildung keine Zwangskräfte wirken? Linearisieren Sie für diesen Fall das Differentialgleichungssystem für kleine Abweichungen $\delta\theta_{ij}$. Zwischenergebnis:

$$\begin{pmatrix} \delta\ddot{\theta}_{21} \\ \delta\ddot{\theta}_{32} \\ \delta\ddot{\theta}_{13} \end{pmatrix} = -\frac{\omega_0^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\theta_{21} \\ \delta\theta_{32} \\ \delta\theta_{13} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Nutzen Sie $\sin\pi/3 = \sqrt{3}/2$ und $\cos\pi/3 = 1/2$.

(3 Punkte)

c) Machen Sie einen geeigneten Ansatz und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenfrequenzen und Normalschwingungen.

(2 Punkte)

d) Welche Gleichgewichtslagen hat das System für Ruhelänge $l = 0$?

(2 Punkte)