1. Test VO Theoretische Mechanik, WS 2020/21

29.01.2021

Sie können alle Fragen knapp beantworten. Achten Sie jedoch bitte darauf, dass die wichtigsten Punkte klar und in Worten beantwortet werden und dass alle wichtigen Zwischenschritte durchgeführt werden. Viel Glück!

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für Kräfte der Form $F = F(x)$ bei einer Bewegung in einer Dimension die Energie

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}(t)\right)^2 + V\left(x(t)\right)$$

erhalten ist. Führen sie alle notwendigen Zwischenschritte explizit durch und diskutieren Sie die wichtigsten Schritte in Worten.

Aufgabe 2. Zeichnen Sie ein beliebiges Potential $V(x)$, das für eine bestimmte Energie E zwei Umkehrpunkte besitzt. Finden Sie eine Beziehung $\dot{x} = v(x)$, wobei $v(x)$ eine Funktion von E und $V(x)$ ist, und diskutieren Sie, wie man diese Beziehung zur Lösung der Bewegungsgleichung benutzen kann (Trennung der Variablen).

Aufgabe 3. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass für die Bewegung eines Teilchens der Masse m in Anwesenheit der Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$ der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ erhalten ist. Betrachten Sie den Fall, dass der Drehimpuls $\vec{L} = L\vec{e}_z$ in z-Richtung zeigt. Diskutieren Sie, weshalb die Bewegung in der xy-Ebene stattfindet. Benutzen Sie anstelle von (x, y) Polarkoordinaten (r, ϕ) um zu zeigen, dass $L = mr^2\dot{\phi}$ gilt.

Aufgabe 4. Diskutieren Sie, wie $L = mr^2\dot{\phi}$ mit dem zweiten Keplerschen Gesetz zusammenhängt. Benutzen Sie dazu das Beispiel einer ellipsenförmigen Planetenbahn und erläutern Sie das zweite Keplersche Gesetz anhand einer Skizze.

Aufgabe 5. Betrachten Sie zwei Teilchen, die über die Gravitationskraft miteinander wechselwirken. Zeigen Sie, wie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt $\vec{R}$ und die Relativkoordinate $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ bestimmt werden können. Wie lautet die Lösung für $\vec{R}(t)$.

Aufgabe 6. Betrachten Sie

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

und diskutieren Sie die Bedeutung der einzelnen Beiträge. Wie lautet α für das Gravitationspotential? Zeichnen Sie das effektive Potential in einer Skizze ein und diskutieren Sie, unter welchen Umständen es zu einer (a) Kreisbahn sowie einer (b) gebundenen Bahnkurve kommt.

(Weiter auf der Rückseite)

Aufgabe 7. Betrachten Sie ein Funktional der Form

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx\,,$$

wobei F eine beliebige Funktion sein soll, die von $y(x)$, $y'(x)$ und x abhängt. Diskutieren Sie möglichst genau, wie man die Funktion $y(x)$ bestimmt, die das Funktional $J(y)$ minimiert. Erstellen Sie eine Skizze und leiten Sie die Euler-Lagrangegleichungen her.

Aufgabe 8. Betrachten Sie eine beliebige Variablentransformation $Q_k = Q_k(q, \dot{q}, t; \lambda)$, die von einem kontinuierlichen Parameter λ abhängt. Zeigen Sie, dass aus der Symmetrie $L(q, \dot{q}, t) = L(Q, \dot{Q}, t)$ folgt, dass die Größe

$$\mathcal{Q} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \frac{dQ_k}{d\lambda}$$

zeitlich erhalten ist (Noethertheorem).

Aufgabe 9. Wie sind die Poissonklammern definiert? Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Poissonklammern dar.

Aufgabe 10. Geben Sie die Drehmatrix an, die von einem Inertialsystem in ein rotierendes Bezugsystem transformiert (Drehung um z-Achse, konstante Winkelgeschwingdigkeit ω). Deiskutieren Sie, wie man den Zusammenhang

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_I = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)_R$$

zwischen den beiden Bezugssystemen herleiten kann. Es gilt $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Betrachten Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ im Inertialsystem: wie lautet diese im rotierenden Bezugssystem? Identifizieren Sie die Ausdrücke für die Zentrifugalkraft und die Corioiliskraft.

Aufgabe 11. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass sich das Skalarprodukt $I = x_\mu x^\mu$ bei einem Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes nicht ändert. Starten Sie von der Matrix für die Lorentztransformation (schreiben Sie diese explizit an). Diskutieren Sie in Worten und mit Hilfe eines Minkowskidiagramms die Bedeutung von zeitartigen, lichtartigen und raumartigen Abständen.

Aufgabe 12. Wie sind die 4er-Geschwindigkeit u^μ und der 4er Impuls p^μ definiert? Wie lautet die Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung in der speziellen Relativitätstheorie? Drücken Sie die 4er-Kraft f^μ mit Hilfe der gewöhnlichen Kraft $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ aus. (Tipp: benutzen Sie $u_\mu u^\mu = c^2$).