Vorlesungsprüfung Theoretische Mechanik. 4. Feb. 2026

r

Geben Sie deutlich bei jeder Antwort die Bezeichnung des zugehörigen Unterpunktes an (z.B.: "(3b):···").
Alle Antworten zum selben Thema (Zahl (z.B.:3)) müssen beieinander stehen und von anderen Themen durch einen horizontalen Strich getrennt werden.
Widersprüchliche oder unverständliche Antworten werden als falsch bewertet.
Wenn Sie eine Variable (Größe) verwenden, die nicht in den Angaben ist und noch nicht definiert wurde (auch, z.B. γ), müssen Sie diese als Funktion der angegebenen Variablen (und ggf. Zeitableitungen) definieren (ausgenommen, t, c, g).
In der Regel reicht für jede Antwort eine Formel oder ein kurzer Satz.

Bitte Handy ausschalten und in Handtasche/Rucksack geben.

1. **Lorentz-Transformation, Vierergeschwindigkeit (8P=4+2+2)**
   Betrachten Sie zwei Inertialsysteme S und S', wobei S' sich mit der Geschwindigkeit $\beta \boldsymbol{e}_2$ gegenüber S bewegt. Benutzen Sie $c = 1$.
   (a) Schreiben Sie explizit die vier Komponenten (u_0, u_1, u_2, u_3) der Vierergeschwindigkeit eines Teilchens in S in Abhängigkeit von den vier Komponenten u'_μ in S'.
   (b) Schreiben Sie u_μ als Funktion der Geschwindigkeit des Teilchens $\boldsymbol{v}$.
   (c) Bestimmen Sie (mit Herleitung) $u_\mu u^\mu$
   Hinweis: Punkt (a) ist unabhängig von (b),(c).

2. **Harmonischer Oszillator (10P)**
   Gegeben sei ein gedämpfter harmonischer Oszillator mit Bewegungsgleichungen
   $$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\, q^2 x = 0\,.$$
   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $\gamma > 0$ aber ohne Grenzfall $\gamma^2 = q^2$.
   (b) Für welchen Fall gibt es Schwingungen? Schreiben Sie für diesen Fall die allgemeine Lösung mit sin und cos-Funktionen.
   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für den Grenzfall $\gamma^2 = q^2$.
   (d) Es wirke von nun an zusätzlich eine Kraft $F = m\, f \sin(\omega t)$
   Bestimmen Sie die partikuläre Lösung
   (e) Bestimmen Sie die Amplitude der Oszillationen in der partikulären Lösung.

[redacted]

3. **Lagrange, Hamilton, gebundene Bahnen (10P)**
   Die Lagrangefunktion eines Systems mit verallgemeinerten Koordinaten θ und $\rho > 0$ laute ($a > 0$, während $k > 0$ oder < 0 sein kann.):
   $$\mathcal{L} = a\left(\rho^2\,\dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2\right) - \frac{k}{\rho}$$
   (a) Gibt es zyklische Koordinaten? Wenn ja, welche?
   (b) Welche Erhaltungsgröße(n) gibt es? (Formel als Funktion von ρ, θ etc.!)
   (c) Schreiben Sie den Ausdruck für $\dot{\theta}$ als Funktion seines zugehörigen Impulses p_θ, eliminieren Sie $\dot{\theta}$ und bestimmen Sie das effektive Potential $U_{eff}(\rho)$
   (d) Für welche Werte von k gibt es gebundene Bahnen. Skizzieren Sie $U_{eff}(\rho)$ für diesen Fall. Skizzieren Sie die Energie einer solchen Bahn und markieren Sie die Umkehrpunkte.
   (e) Bestimmen Sie den verbleibenden verallgemeinerten Impuls p_ρ und die Hamiltonfunktion (mit den richtigen Variablen!).

4. **Symmetrien (6P)**
   Unter welche Transformationen **Bezeichnung und Formel** muss die Lagrange-Funktion invariant sein, damit folgende Größen erhalten sind.
   (a) Drehimpuls (b) Impuls (c) Energie
   Hinweis: Die Formel ist für eine infinitesimale Transformation in der Form $\boldsymbol{r}' = \cdots$, $t' = \cdots$ anzugeben.

5. **Starre Körper (10P)**
   (a) Drücken Sie die Rotationsenergie eines starren Körpers T_{rot} in Abhängigkeit von den Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit (ω_i) und des Trägheitstensors (I_{ij}) aus.
   (b) Schreiben Sie die Formel für den Trägheitstensor I_{ij} für eine kontinuierlicher Massendichte $\rho(\boldsymbol{r})$. [redacted]
   (c) Eine Eulergleichung lautet (der superscript wird weggelassen).
   $$M_3 = \Theta_3\,\dot{\omega}_3 + \omega_1\,\omega_2\,(\Theta_2 - \Theta_1)$$
   Geben Sie die beiden anderen an.
   Gelten die Eulergleichungen im Inertial- oder im Körperfesten System?
   (d) Der Trägheitstensor sei von nun an diagonal mit Trägheitsmomenten $(\Theta_1, \Theta_1, \Theta_3)$ (symmetrischer Kreisel). Schreiben Sie die Komponenten von $\boldsymbol{L}$ in Abhängigkeit von den ω_i.
   In welchen Fällen stehen $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{\omega}$ parallel zueinander?
   (e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die drei Komponenten von ω im symmetrischen Kreisel ohne Kräften ($\boldsymbol{M} = 0$).
   Hinweis: Zeigen Sie, dass ω_3 konstant ist und benutzen Sie das für die anderen beiden Gleichungen. Es reicht die allgemeine Lösung für ω_1.