

Name:

Matrikelnr:

## Vorlesungsprüfung Theoretische Mechanik. 3. Feb. 2022

Geben Sie deutlich bei jeder Antwort die Bezeichnung des zugehörigen Unterpunktes an (z.B.: "(3b):...").

Alle Antworten zum selben Thema (Zahl (z.B.:3)) müssen beieinander stehen und von anderen Themen durch einen horizontalen Strich getrennt werden.

Widersprüchliche oder unverständliche Antworten werden als falsch bewertet.

Wenn Sie eine Variable (Größe) verwenden, die nicht in den Angaben ist und noch nicht definiert wurde (auch, z.B.  $\gamma$ ), müssen Sie diese als Funktion der angegebenen Variablen (und ggf. Zeitableitungen) definieren (ausg.,  $t$ ,  $c$ ,  $g$ ).

In der Regel reicht für jede Antwort eine Formel oder ein kurzer Satz. Wenn nicht anders angegeben, zählt jeder Unterpunkt einen Punkt.

Bitte Handy ausschalten und in Handtasche/Rucksack geben.

### 1. Viererkraft

$K_\mu$  sei die Viererkraft auf ein Teilchen mit Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $v$ . Schreiben Sie den Ausdruck für

(a)  $\frac{dp_\mu}{d\tau}$ ,  $\frac{dp_\mu}{dt}$

(b) die Leistung

(c) zeigen Sie, dass  $p_\mu K^\mu = 0$  (Hinweis:  $p_\mu p^\mu$  und seine Zeitableitung).

### 2. Lorentz-Transformation (3P)

Betrachten Sie zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$ , wobei  $S'$  sich mit der Geschwindigkeit  $v e_2$  gegenüber  $S$  bewegt. Benutzen Sie  $c = 1$ . Schreiben Sie explizit die vier Komponenten ( $u_0, u_1, u_2, u_3$ ) der Vierergeschwindigkeit in  $S$  in Abhängigkeit von den vier Komponenten  $u'_\mu$  in  $S'$ .

### 3. Symmetrien

(0.5 Punkte pro korrekter Antwort. Alternative: siehe unten)

Markieren Sie mit einem "X" jene Größen, die bei den jeweiligen Lagrange-funktionen erhalten (also Konstanten der Bewegung) sind.

Hinweis:  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  und  $a > 0, b > 0$  sind Konstanten.

	Energie	Drehimpuls
$\mathcal{L} = a \dot{\mathbf{r}}^2 + b(x + y + z)$	X	
$\mathcal{L} = a \dot{\mathbf{r}}^2 + b e^{-b \mathbf{r} }$	X	X
$\mathcal{L} = a \dot{\mathbf{r}}^2 + b(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})$	X	X
$\mathcal{L} = a \dot{\mathbf{r}}(t)^2 + b x(t)$	X	X
$\mathcal{L} = a \dot{\mathbf{r}}^2 + b x \cos(t)$		X
$\mathcal{L} = a \dot{\mathbf{r}}^2$	X	X

Alternative:(Max 3 Punkte und keinen Punkt aus der Tabelle, wenn Sie auf diese Frage eingehen): Unter welchen Transformationen muss die Lagrange-Funktion invariant sein, damit die o.g. Größen jeweils erhalten sind?

Bitte wenden!

#### 4. Starrer Körper

- (a) Drücken Sie die erste Komponente  $L_1$  des Drehimpulses eines starren Körpers in Abhängigkeit von den Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit ( $\omega_i$ ) und des Trägheitstensors ( $I_{ij}$ ) aus.

Der Trägheitstensor sei nun

$$\mathbf{I} = a \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und der Körper rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega} = (2q, q, 0)$ .

- (b) Bestimmen Sie die Rotationsenergie des Körpers  
(c) Bestimmen Sie den Drehimpuls des Körpers  
(d) Bestimmen Sie ein Hauptträgheitsmoment und die zugehörige Hauptträgheitsachse.  
(e) Bestimmen Sie die zwei restlichen Hauptträgheitsmomente
5. **Lagrange, Hamilton, gebundene Bahnen**

Die Lagrangefunktion eines Systems mit verallgemeinerten Koordinaten  $\theta$  und  $\rho > 0$  laute ( $a > 0, k > 0$ ):

$$\mathcal{L} = a \left( \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2 \right) + \frac{k}{\rho^2}$$

- (a) Gibt es zyklische Koordinaten? Wenn ja, welche?  
(b) Welche Erhaltungsgröße(n) gibt es? (Formel als Funktion von  $\rho, \theta$  etc.!)  
(c) Schreiben Sie den Ausdruck für  $\dot{\theta}$  als Funktion seines zugehörigen Impulses  $p_\theta$ , eliminieren Sie das und bestimmen Sie das effektive Potential  $U_{eff}(\rho)$   
(d) Skizzieren Sie  $U_{eff}(\rho)$  für alle qualitativ unterschiedliche Fälle. Unter welchen Bedingungen (Werte der Energie,  $p_\theta$  und andere Parameter) ist die Bewegung von  $\rho$  auf einen endlichen Bereich beschränkt ("gebundene Bahn")?  
(e) Schreiben Sie den verbleibenden verallgemeinerten Impuls und die Hamiltonfunktion.

#### 6. Rotierende Bezugssysteme

- (a) Welche sind die zwei Scheinkräfte in einem rotierenden Bezugssystem (nur Name)?  
(b) Schreiben Sie deren Ausdruck.