Prof. Dr. A. Maas
Institut für Physik

N A W I
G R A Z

Klausur zur Vorlesung theoretische Mechanik

WS 2016/17

06. Februar 2017

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ ID Nummer: ____________

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer. Zum bestehen der Klausur sind maximal 50 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K1	K2a	K1c	K2b	K2c	K2d	K3	$\sum$	Note

Aufgabe K1: Zerfallendes Pion (20 Punkte)

Elektrisch neutrale Pionen π^0 der Masse m_{π^0} zerfallen nach 8.4×10^{-17}s hauptsächlich in zwei masselose Photonen. Berechnen Sie die Viererimpulse der beiden emittierten Photonen für ein in Ruhe zerfallendes π^0.

Aufgabe K2: Lagrangeformalismus (8+14+28+20=70 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m kann sich entlang der x-Achse bewegen, ein zweites Teilchen derselben Masse entlang der z-Achse. Beide Teilchen sind durch eine starre Stange der Länge l verbunden. Desweiteren wirke ein homogenes Schwerefeld entlang der negativen z-Achse.

a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf.

b) Verwenden Sie dann als generalisierte Koordinate den Winkel der Stange mit der x-Achse, und zeigen Sie, daß die Lagrangefunktion durch $L = ml^2(d_t\alpha)^2/2 - mgl\sin\alpha$ gegeben ist.

c) Stellen Sie die Lagrangegleichungen zweiter Art auf, und lösen Sie sie für den Fall $\alpha \approx \pi/2$. Ist die Lage stabil?

d) Bestimmen Sie mittels Legendretransformation die Hamiltonfunktion und stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

Bitte wenden.

Aufgabe K3: Poissonklammern (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\{\cos(q+p), qp\}.$$

Formelsammlung

$\frac{1}{(1+x)^n} \approx 1 - nx$ für $x \ll 1$; $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$; $\vec{p} = m\vec{v}$; $W = \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{F}$; $E = T + V$; $\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$; $\frac{d(T+V)}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$; $m\vec{a}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{cen} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{tr} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}\,') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}\,' + m\ddot{\vec{R}}\,'$; $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$; $g_{\mu\nu}k^\nu = k_\mu$; $g_{\nu\mu}k^\mu = k_\nu$; $g^{\nu\mu}k_\mu = k^\nu$; $g^{\mu\nu}k_\nu = k^\mu$; $\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)\frac{\vec{x}\vec{v}}{\vec{v}^2}\vec{v} - \gamma\vec{v}t$; $ct' = \gamma\left(ct - \frac{\vec{x}\vec{v}}{c}\right)$; $\vec{w}' = \frac{1}{1-\frac{vw_x}{c^2}}\left(w_x - v, \frac{w_y}{\gamma}, \frac{w_z}{\gamma}\right)^T$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = \frac{v}{c}$; $u^\mu = \gamma(v)(c, \vec{v})$; $m\frac{du^\mu}{d\tau} = K^\mu$; $dt = \gamma d\tau$; $K^\mu = \gamma(v)\left(\frac{\vec{F}\vec{v}}{c}, \vec{F}\right)$; $p^\mu = (E/c, \vec{p})$; $\vec{F} = \frac{Gm_1^g m_2^g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$; $\left(\vec{F}(\vec{x})\right)_i = -\partial_{x_i}V(\vec{x})$; $d_t^2\vec{r}(t) = -\frac{\alpha}{m}\vec{r}$; $\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = V_e(r)$; $M = \sum_i m_i$; $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$; $\vec{L} = \sum m_i\epsilon_{ijk}r_i\dot{r}_j\vec{e}_k$; $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$; $p + q = p' + q'$; $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{\text{Particles going into } d\Omega}{\text{Total incident particles}}$; $M_V = \int_V d^3\vec{r}\rho(r)$; $J = \int d^3\vec{r}\rho(\vec{r})\left|\epsilon_{ijk}\frac{\vec{\omega}_i}{\omega}\vec{r}_j\vec{e}_k\right|^2$; $V(x) \approx V(x_0) + d_xV(x)|_{x=x_0}(x - x_0) + d_x^2V(x)|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \mathcal{O}\left((x - x_0)^3\right)$; $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \Lambda(t)\vec{R}(t)$; $J_{ij} = \int d\vec{r}^3\rho(\vec{r})\left(\vec{r}^2\delta_{ij} - r_ir_j\right)$; $x^2 = \vec{x}^2 - c^2t^2$; $(x')_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$; $v_\mu g^{\mu\nu}v_\nu = v_\mu v^\mu$; $E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$; $(\vec{K}_i - d_t\vec{p}_i)\delta\vec{r}_i = 0$; $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$; $\left(d_t\frac{\partial T}{\partial d_tq_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0$; $L = T - V$; $d_t\frac{\partial L}{\partial d_tq_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$; $L = T - U$; $Q_i = d_t\frac{\partial U}{\partial d_tq_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$; $p_i = \frac{\partial L}{\partial d_tq_i}$; $f_{ji}(q_1, ..., q_r, t)dq_i + f_j(q_1, ..., q_r, t)dt = 0$; $d_t\frac{\partial L}{\partial d_tq_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \lambda_jf_{ji} = 0$; $\tilde{Q}_i = \lambda_jf_{ji}$; $\int_t^{t+\tau}Tdt = -\frac{n}{2}\int_t^{t+\tau}Vdt$; $\int_t^{t+\tau}Tdt = -\frac{1}{2}\int_t^{t+\tau}\vec{r}_i\vec{F}_idt$; $S[q] = \int_{t_1}^{t_2}dtL(t)$; $\delta S = 0$; $y(x) = y_s(x) + \alpha\eta(x)$; $S[q] = \int_{t_1}^{t_2}dt(T + \vec{K}_i\vec{r}_i)$; $g(u) = f(x) - ux = f(x) - x\frac{df}{dx}$; $f(x) = g(u(x)) + u(x)x$; $H(q_i, p_i, t) = p_id_tq_i(q_j, p_j) - L(q_i, p_i(q_j, p_j), t)$; $d_tq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$; $d_tp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$; $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$; $d_tH = \partial_tH$; $H = T+V$; $A = \int_{t_1}^{t_2}dtp_id_tq_i$; $S = \int_{\tau_1}^{\tau_2}L(x_\mu, u_\mu, \tau)d\tau$; $\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i$; $\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$; $\partial_tF_1(q_i(Q_i, P_i, t), Q_i, t) = h(Q_i, P_i, t) - H(q_i(Q_i, P_i, t), p_i(Q_i, P_i), t)$; $\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$; $\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i$; $\frac{\partial F_2}{\partial t} = h - H$; $\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i$; $\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = P_i$; $\frac{\partial F_3}{\partial t} = h - H$; $\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i$; $\frac{\partial F_4}{\partial P_i} = Q_i$; $\frac{\partial F_4}{\partial t} = h - H$; $\{f, g\}_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $d_tf = \{f, H\} + \partial_tf$; $\{q_j, q_k\} = 0$; $\{p_j, p_k\} = 0$; $\{q_j, p_k\} = \delta_{jk}$; $\{f, f\} = 0$; $\{f(q_j), g(q_k)\} = 0$; $\{f(p_j), g(p_k)\} = 0$; $\{c, g(p_j, q_j)\} = 0$; $\{f, g\} = -\{g, f\}$; $\{c_1f_1 + c_2f_2, f_3\} = c_1\{f_1, f_3\} + c_2\{f_2, f_3\}$; $\{f_1f_2, f_3\} = f_1\{f_2, f_3\} + \{f_1, f_3\}f_2$; $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$; $F_2 = q_iP_i + \epsilon G(q_i, P_i) \to \delta u = \epsilon\{u, G\}$; $H\left(q_i, \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, t\right) + \partial_tF_2 = 0$; $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_i} = \beta_i$; $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$; $F_2 = W'(q_1, ..., q_{k-1}) + \sum_{i \geq k}\alpha_iq_i - Et$; $F_2 = \int dtL$; $J_i = \oint_\tau p_idq_i$; $\omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$; $J = J_1(\phi)J_3(\theta)J_1(\psi)$; $I_3\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = M_3$; $B_{ij} = V_{ij} - m_{ij}\omega^2$; $\det B = 0$; $\vec{\eta} = A\vec{\zeta}$; $\eta_i = \sum_k a_k^if_k\cos(\omega t + \delta_k)$; $S = \int dtL = \int dtd^3\vec{r}\mathcal{L}$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\eta} + \frac{d}{dr_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\eta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} = 0$; $\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\eta}$; $\mathcal{H} = \pi d_t\eta - \mathcal{L}$; $I = I_{\text{Schwerpunkt}} + ml^2$

Lösungen:

Aufgabe K1

In diesem Prozeß gilt Viererimpulserhaltung. Weiterhin sind Photonen masselos, daher ist für sie $E = |\vec{p}|c$. Um die Dreierimpulserhaltung zu garantieren, müssen sie in entgegengesetzte Richtung emittiert werden. Daher sei diese Richtung in z-Richtung gelegt, und es gilt

$$p_{\pi_0} = (m_{\pi_0}c, 0, 0, 0)^T = p_{\gamma 1} + p_{\gamma 2} = (E_{\gamma 1}/c + E_{\gamma 2}/c, 0, 0, p^z_{\gamma 1} + p^z_{\gamma 2})^T.$$

Damit folgt sofort $p^z_{\gamma 1} = -p^z_{\gamma 2}$. Weiterhin gilt $m_{\pi_0}c^2 = E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}$. Da $E_{\gamma i} = |\vec{p}_{\gamma i}|c$ gilt, müssen beide Energien gleich groß sein, und zwar genau $E_{\gamma 1} = E_{\gamma 2} = m_{\pi_0}c^2/2$. Die Viererimpulsvektoren der beiden Photonen sind somit

$$\begin{aligned} p_{\gamma 1} &= (m_{\pi_0}c/2, 0, 0, m_{\pi_0}c/2)^T \\ p_{\gamma 2} &= (m_{\pi_0}c/2, 0, 0, -m_{\pi_0}c/2)^T. \end{aligned}$$

Aufgabe K2

a) Die drei Zwangsbedingungen sind $z_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_1^2 + z_2^2 = l^2$.

b) Die Transformation auf die generalisierte Koordinate erfolgt mittels

$$\begin{aligned} x_1 &= l\cos\alpha \\ z_2 &= l\sin\alpha \end{aligned}$$

Damit ist die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{m}{2}((d_t z_2)^2 + (d_t x_1)^2) - mgz_2 = \frac{ml^2(d_t\alpha)^2}{2} - mgl\sin\alpha.$$

c) Die Lagrangegleichung zweiter Art ist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial d_t\alpha} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = ml^2 d_t^2\alpha + mgl\cos\alpha = 0.$$

Für $\alpha \approx \pi/2$ ist die Bewegungsgleichung

$$d_t^2\phi - \frac{g}{l}\phi = 0$$

für $\phi = \alpha - \pi/2$. Das ist die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator, allerdings mit 'falschem' Vorzeichen, mit Lösung

$$\phi(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

und damit exponentiellem Verhalten und daher instabil.

d) Dies ergibt

$$\begin{aligned}
p_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial d_t\alpha} = ml^2 d_t\alpha \\
H &= p_\alpha d_t\alpha - L = \frac{p_\alpha^2}{ml^2} - \frac{p_\alpha^2}{2ml^2} + mgl\sin\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2ml^2} + mgl\sin\alpha \\
d_t p_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -mgl\cos\alpha \\
d_t\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{p_\alpha}{ml^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe K3

$$\{\cos(q+p), qp\} = (-\sin(p+q))(q) - (p)(-\sin(p+q)) = (p-q)\sin(p+q).$$