Theoretische Mechanik WS 2023/24, 2. Test

Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem neuen Zettel und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf dem Tisch dürfen nur das von uns zur Verfügung gestellte Schreibpapier, Stift, der Studierendenausweis, sowie das rot umrahmte Formelblatt liegen.
Handgeschriebene Zettel auf dem Nebentisch müssen zugedeckt werden (außer der Formelsammlung).
Handys bitte ausschalten und in Ihrer Tasche lassen.

K4 Schwingungen (14P)

Ein System, beschrieben durch die Koordinaten x und y hat die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2\right) + \alpha\left(-\frac{x^2}{2} + \cos(2y) + \cos(x-2y)\right)$$

(a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen im Fall kleiner x und y an.
(**Tipp:** schreiben Sie die Bewegungsgleichungen allgemein und danach setzten Sie die Winkelfunktionen $\sin\alpha \to \alpha$).
(**Ersatzausdruck** für den Rest: $\ddot{x} = -\beta x + \beta y \qquad 4\,\ddot{y} = -4\beta y + \beta x \qquad \beta > 0$).
(b) Führen Sie den Vektor $\boldsymbol{v} = (x, y)$ ein und schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform. Geben Sie die Matrizen an.
(c) Suchen Sie nach Lösungen der Form

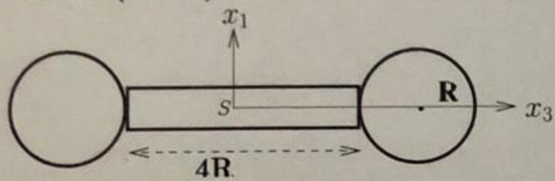
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{u}e^{i\omega t}.$$

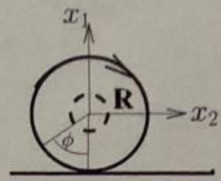
Welche Gleichungen müssen ω und $\boldsymbol{u}$ erfüllen? (Matrixform, Determinante? Schreiben Sie diese in Matrixform. Sie müssen noch nicht die Einträge der Matrizen substituieren)
(d) Finden Sie die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2
(**Lösung** $\omega_1 = q\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\omega_2 = q\sqrt{\frac{3}{2}}$, $q^2 = \frac{2\alpha}{m}$. Nur verifizieren: 1P)
(e) bestimmen Sie **einen** der Eigenmoden $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ (Lösung $\boldsymbol{u}_1 = (2, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2, -1)$).
(f) Schreiben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für $\boldsymbol{v}(t)$ (ggf. mit unbekannten ω_1, ω_2, falls Sie diese nicht bestimmen konnten).
(g) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung mit Anfangsbedingungen

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \qquad x(0) = 0 \quad y(0) = 2$$

Bitte wenden!

K5 Hantel (12P)





Eine Hantel (Abb. links) besteht aus zwei Kugeln mit Radius R und Masse M verbunden mit einem Zylinder mit Radius r, Länge $L = 4R$ und Masse m.

(a) In welche Richtungen zeigen die Hauptträgheitsachsen? (Geben Sie die Einheitsvektoren an)

(b) Bestimmen Sie den Hauptträgheitsmoment Θ_3 für Drehungen um den Schwerpunkt S.

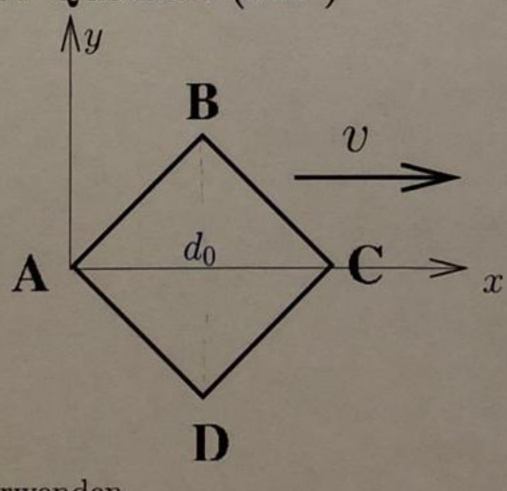
(c) Bestimmen Sie anderen beiden Θ_1 und Θ_2.

(d) Die Hantel rollt ohne Schlupf auf einer flachen Ebene (Abb. rechts). Schreiben Sie den Ausdruck für die gesamte kinetische Energie als Funktion von $\omega \equiv \dot{\phi}$.

(Falls Sie b,c nicht gemacht haben, brauchen Sie für (d) nicht die expliziten Ausdrücke, aber Sie müssen angeben, welches Trägheitsmoment Sie verwenden.)

Hinweis: Hauptträgheitsmomente für Drehungen **um den jeweiligen Schwerpunkt** (Achsen wie in Abb.): (1) Zylinder $\Theta_3 = \frac{m}{2}r^2$, $\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{m}{4}(r^2 + \frac{L^2}{3})$ (2) Kugel $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \frac{2}{5}MR^2$.

K6 Relativistisches Quadrat (12P)



Sie können hier $c = 1$ verwenden.

Im Ruhesystem S' eines Quadrats haben seine Diagonalen die Länge d_0. Das Quadrat bewege sich mit Geschwindigkeit v in Bezug auf das Laborsystem S (siehe Abb.) in Richtung der Diagonale AC.

(a) Welche Länge haben die Diagonalen aus Sicht eins Beobachters in S?

(b) Welche Länge haben die Kanten aus Sicht von S ?

(c) Bestimmen Sie die Winkel der Figur aus Sicht von S.

Die Kante A befinde sich aus Sicht von S bei der Zeit $t = 0$ in $(x, y) = (0, 0)$

(d) An der Ecke B wird um $t' = 0$ (Zeit im Ruhesystem des Quadrats) ein Signal ausgesendet. Geben Sie die Zeit- und Ortskoordinaten dieses Signals im System von S an.