Name:	Vorname:	Matrikelnr.:	Gruppe: (KFU A,B) (TUG 1,2,3,4)

[redacted]

Theoretische Mechanik

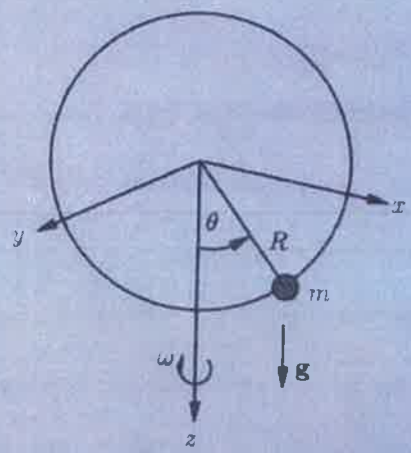
1. Teilklausur 30.11.2015 18:15-20:30 HSi13

Aufgabe 1. (30 Pkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\alpha\mathbf{r}$, $\alpha > 0$, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$. Zeige, diese Kraft ist konservativ. Berechne das zugehörige Potential. Löse in kartesischen Koordinaten die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$. Verifiziere mithilfe der gefundenen Lösung (in Vektorschreibweise) explizit, dass die Energie, $E = T + U$ (kinetische plus potentielle), und der Drehimpuls, $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, während der Bewegung erhalten sind, dh. Energie und Drehimpuls sind Konstante der Bewegung. Was folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses für die Geometrie der Bewegung?

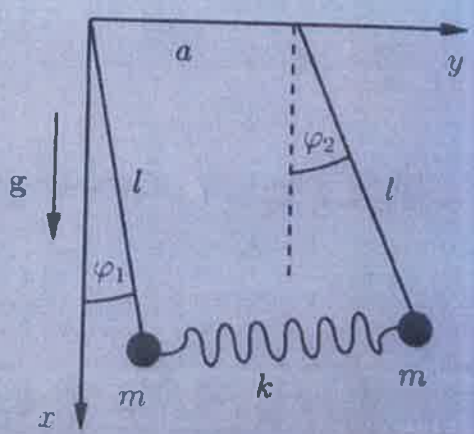
Aufgabe 2. (35 Pkte)

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einem vertikal stehenden Ring vom Radius R. Der Ring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Durchmesser im homogenen Schwerefeld $g\mathbf{e}_z$. Wie lauten die Zwangsbedingungen. Wie lauten die Lagrangegleichungen 2. Art? Löse die Bewegungsgleichungen für kleine Ausschläge θ zur Anfangsbedingung $\dot{\theta}(0) = 0$ ($\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$). Wann wird die linearisierte Lösung instabil?



Aufgabe 3. (35 Pkte)

Zwei gleiche Pendel der Masse m und Länge l sind durch eine masselose, ideale Feder mit Federkonstante k verbunden und bewegen sich in einer vertikalen Ebene im Schwerefeld der Erde. Die ungestreckte Länge a der Feder ist gleich dem Abstand der Aufhängepunkte der Pendel. Berechne die kinetische Energie T und die potentielle Energie von Gravitation und Feder $U = U_G + U_F$ in kartesischen Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2. Führe die verallgemeinerten Koordinaten φ_1, φ_2 ein und drücke T und U durch diese aus. Nähere die potentielle Energie U bis zur quadratischen Ordnung, also im gravitativen Anteil setze $\cos\varphi_{1,2} \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_{1,2}^2$ und im Anteil der Feder vernachlässige die Vertikalkomponenten, das heißt setze $l(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) \approx l(-\frac{\varphi_2^2}{2} + \frac{\varphi_1^2}{2}) \to 0$ und verwende zudem die Näherung $\sin\varphi_{1,2} \approx \varphi_{1,2}$ für die Horizontalkomponenten. Hinweis: $a + l(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$ für kleine Auslenkungen. Wie lautet die zugehörige Lagrangefunktion in den verallgemeinerten Koordinaten? Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die gekoppelten Schwingungen?

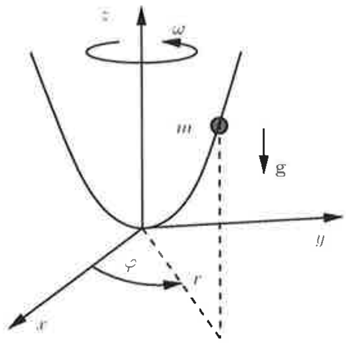


Name:	Vorname:	Matrikelnr.:	Gruppe: (KFU A,B) (TUG 1,2,3,4)

Theoretische Mechanik

2. Teilklausur 28.01.2016 HSi13

Aufgabe 1. (30 Pkte)



Eine Perle gleite reibungsfrei auf einem parabelförmig gebogenen Draht $z = \alpha r^2$, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$ um die z-Achse rotiert im homogenen Gravitationsfeld $\mathbf{g}$.

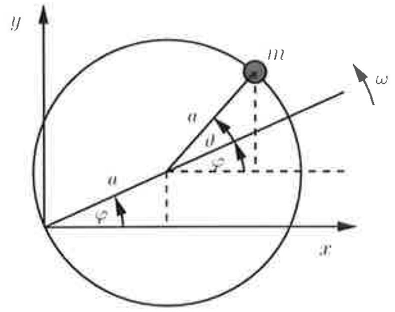
i) Wie lauten die Zwangsbedingungen g_1, g_2 in Zylinderkoordinaten (r, φ, z, t) (2 Punkte)?

ii) Stelle die Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrange-Gleichungen erster Art auf (14 Punkte).

iii) Welche drei Kräfte verursachen die Zwangskraft (9 Punkte)?

iv) Für welchen Wert ω wirkt die Summe aus Gravitations- und Zentrifugalkraft genau senkrecht zum Draht, dh. $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ (5 Punkte)?

Aufgabe 2. (35 Pkte)



Eine Perle bewege sich reibungsfrei auf einem Ring, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$ um den Koordinatenursprung dreht (kein Gravitationsfeld).

i) Bestimme den Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten x, y und dem Winkel ϑ (6 Punkte).

ii) Berechne die kinetische Energie T und zeige (10 Punkte)

$$T = \frac{ma^2}{2}\left[\omega^2 + \left(\omega + \dot{\vartheta}\right)^2 + 2\omega\left(\omega + \dot{\vartheta}\right)\cos\vartheta\right].$$

iii) Berechne die Bewegungsgleichung für ϑ aus der Lagrangefunktion (5 Punkte).

iv) Berechne den zu ϑ kanonisch konjugierten Impuls p_ϑ (5 Punkte).

v) Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion $H(p_\vartheta, \vartheta, t)$ (5 Punkte)?

vi) Wie lauten die Hamiltonschen Gleichungen (6 Punkte)?

vii) Welche Konstanten der Bewegung gibt es in diesem Problem (3 Punkte)?

Aufgabe 3. (15 Pkte)

Berechne den Trägheitstensor für einen homogenen Zylinder mit Massendichte ρ, Radius R und Länge L.

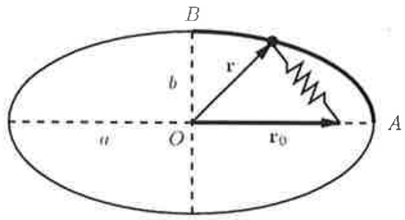
Aufgabe 4. (15 Pkte)

Mit welcher Geschwindigkeit relativ zum Inertialsystem muss ein Astronaut zum nächstgelegenen Stern Proxima Centauri, 4.2 Lichtjahre entfernt, fliegen, damit seine Borduhr bei der Ankunft 6 Monate anzeigt?

Zwischenklausur aus Analytischer Mechanik Übungen, 03.12.2013

Aufgabe 1: (Wegintegral)

Gegeben sei ein Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit den Halbachsen a und b. Finde eine geeignete Parametrisierung und berechne die Arbeit W, die das Kraftfeld einer Feder $\mathbf{F} = k(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})$, befestigt im Brennpunkt der Ellipse $\mathbf{r}_0 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)^T$, bei Bewegung eines Teilchens entlang dem Ellipsenbogen im ersten Quadranten von A nach B leistet. Verifiziere, dass das entsprechende Wegintegral $\overline{AOB}$ zum gleichen Ergebnis führt. Welche allgemeine Vermutung legt dies nahe?



Aufgabe 2: (Elastischer Stoß)

Gegeben seien die Massen m_1, m_2 und die Geschwindigkeiten v_1, v_2 zweier Teilchen im Laborsystem. Berechne für einen zentralen elastischen Stoß dieser Masseteilchen,

a) die Geschwindigkeit $\mathbf{v}^*$ des Schwerpunktsystems, $\mathbf{v}^L = \mathbf{v}^S + \mathbf{v}^*$,
b) die Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem vor und nach dem Stoß aus Impuls- und Energieerhaltung,
c) die Geschwindigkeiten im Laborsystem nach dem Stoß durch Rücktransformation,
d) die Impulserhaltung im Laborsystem als Kontrolle.

Aufgabe 3: (Lagrangefunktion)

Bestimme die Lagrangefunktion für das Doppelpendel bestehend aus den Massen m_1, m_2 und Pendellängen l_1, l_2. Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen? Linearisiere die Gleichungen für kleine Winkel φ_1, φ_2.