Name: **Matrikelnr:**

Theoretische Mechanik WS 2025/26, 1. Test

Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem neuen Zettel und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf dem Tisch dürfen nur das von uns zur Verfügung gestellte Schreibpapier, Stift, der Studierendenausweis, sowie das rot umrahmte Formelblatt liegen.
Handgeschriebene Zettel auf dem Nebentisch müssen zugedeckt werden (außer der Formelsammlung).
Handys oder andere elektronnische Geräte bitte ausschalten und in Ihrer Tasche lassen.

K1.1 Kräfte und Potentiale (8 P)

(a) Bestimmen Sie, ob die folgenden Kräftfelder ($\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$, $r \equiv |\boldsymbol{r}|$)

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}) = \alpha \left(x^2 \ \boldsymbol{e}_z + 2 \ z \ x \ \boldsymbol{e}_x\right)$$

$$\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{\gamma}{r} e^{-\alpha r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

jeweils konservativ sind, wobei die Konstanten $\alpha, \gamma > 0$.
(b) Finden Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential.

K1.2 Poissonklammern (6P)

Berechnen Sie die folgende Poissonklammern

- $\{y, L_z\}$
- $\{x \ p_x, L_z\}$
- $\{2 \ y - 3 \ x \ p_x, L_z\}$

K1.3 Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential (8 P.) [1]

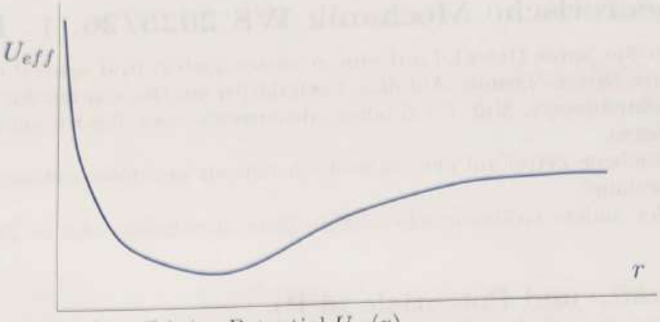
Eine Masse m bewegt sich im (dreidimensionalen) Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + U_0, \qquad \alpha, \beta > 0$$

Die Energie E und der Drehimpuls ℓ der Masse seien gegeben.

[1] Tipp: bezeichnen Sie zunächst die Ergebnisse richtig auf das Bild und schreiben Sie die richtige Gleichungen. Die Rechnungen machen Sie danach. Es wird empfohlen, Variablen für komplexe Ausdrücke einzuführen.

Bitte wenden!

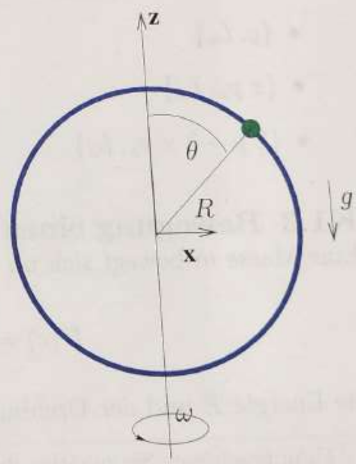


(a) Bestimmen Sie das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$.
(Ersatzausdruck für den Rest: $U_{\text{eff}}(r) = A/r^2 - B/r + U_0$ mit $A, B > 0$)
(b) Beschreiben Sie graphisch auf der Abbildung die Energie einer gebundenen Bahn: **Beschriften Sie explizit die Energie E auf der vertikalen Axe und die Umkehrpunkte r_1,r_2 auf der horizontalen Axe.**
(c) In welchem Energiebereich gibt es gebundene Bahnen?
(d) Bestimmen Sie explizit die Umkehrpunkte.

K1.4 Rotierender Kreis (15P)

Hinweis: Sie können eine einfachere Version dieses Beispiels, d.h. mit $\omega = 0$ machen. Dan können Sie aber Punkt (e) nicht machen und die restlichen Punkte werden mit 3/4 multipliziert. **Sie müssen dies aber klar am Anfang des Beispiels angeben und es gilt für die ganze Aufgabe**

Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Gravitationskraft $m\boldsymbol{g}$ (siehe Bild) auf einem Kreis, der sich um die z Achse mit Winkelgeschwindigkeit ω dreht. (Ursprung: Mittelpunkt der Kreises)



(a) Geben Sie die kartesische Koordinaten (x, y, z) des Teilchens als Funktion der verallgemeinerten Koordinate θ an.
(b) Gleiches für die Geschwindigkeiten.
(c) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.
Ersatzausdruck ab hier, falls (c) nicht geschafft: *(Achtung, das ist nicht die richtige Form)*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A\, \dot{\theta}^2 + B \cos^2\theta + C \sin\theta$$

(d) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen.
(e) Finden Sie die stationäre Lösung (es gibt eigentlich drei davon, nur die mit $\theta \neq 0, \pi$ ist relevant. Wie kann man qualitativ einen der zwei Termen in (d) mit Hilfe von Scheinkräften verstehen?
(f) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion (auf dir richtige Variablen aufpassen)
(g) Bestimmen Sie die Hamiltonsche Bewegungsgleichungen.
(h,1P) Ist die Hamiltonfunktion erhalten? Warum?