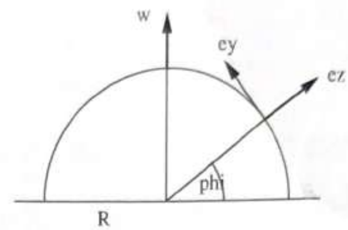
Aufgabe 1.1: Bewegungen auf der rotierenden Erde

Die Bewegung eines Massenpunktes m auf der rotierenden Erde beschreibt man in der Regel in einem mitrotierenden Labor-Bezugssystem K' mit $\mathbf{r}' = (x, y, z)$. Dabei ist K' kein Inertialsystem mehr, und es treten Scheinkräfte auf. Für Bewegungen nahe der Erdoberfläche ($|\mathbf{r}'| \ll R$) gilt näherungsweise:



$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\hat{g}\,\mathbf{e}_z - 2\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'.$$

Dabei bezeichnet $\hat{g}$ die lokale gemessene Erdbeschleunigung, in der die Auswirkungen der Zentrifugalkraft und der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt enthalten sind. Der zweite Term ist die Coriolis-Beschleunigung.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Komponenten x, y und z von $\mathbf{r}'$ auf. Dabei soll die x-Achse nach Osten zeigen, die y-Achse nach Norden und die z-Achse vertikal nach oben. In welche Richtung zeigt die Coriolis-Kraft auf einen horizontal (d.h. in der xy-Ebene des Laborsystems) bewegten Körper am Nordpol/Äquator?

(4 Punkte)

b) Eötvös-Effekt: Betrachten Sie einen Körper, der sich nach Osten bewegt. Die Coriolis-Beschleunigung führt zu einer Gewichtsänderung. Bestimmen Sie die zugehörige Formel.

(3 Punkte)

c) Ostablenkung: Betrachten Sie den freien Fall aus einer Höhe h über der Erdoberfläche. Bestimmen Sie die Ostablenkung in Abhängigkeit von h.

Hinweis: Berücksichtigen Sie, dass $\dot{x}$ und $\dot{y}$ während des Falls vernachlässigbar klein bleiben.

(3 Punkte)

Aufgabe 1.2: Teilchen im elektrischen und magnetischen Feld

Gegeben ist ein beliebiges statisches räumlich konstantes elektrisches Feld $\mathbf{E}$ sowie ein statisches und homogenes magnetisches Feld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ in z-Richtung, welche auf einen geladenen Massenpunkt m mit Ladung q und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ausüben.

a) Stellen Sie für alle drei Komponenten des Ortsvektors $\mathbf{x}(t)$ die Bewegungsgleichung auf und lösen diese für die z-Komponente für beliebige Anfangsbedingungen. Drücken Sie die anderen beiden Gleichungen durch die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y und deren Zeitableitung aus.

(3 Punkte)

b) Leiten Sie nun eine der beiden anderen Gleichungen nach der Zeit ab und setzen geeignet ineinander ein, um zunächst $v_x(t)$ und $v_y(t)$ und daraus auch die allgemeine Lösung für $x(t)$ und $y(t)$ zu bestimmen. Skizzieren Sie die Bahnkurve für $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$.

(4 Punkte)

Bitte wenden!

c) Formulieren Sie nun die Differentialgleichungen für die x- und y-Komponenten in vektorieller Form, indem Sie den Kopplungsbeitrag der Lorentzkraft als Produkt einer Matrix M mit einem zweidimensionalen Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{||}$ ausdrücken:

$$\dot{\mathbf{v}}_{||} = M\mathbf{v}_{||} + \frac{q}{m}\mathbf{E}_{||}.$$

Wie sieht die Matrix M aus? Wie können Sie darauf aufbauend das Gleichungssystem entkoppeln?

(3 Punkte)

Aufgabe 1.3: Stabilität von Kreisbahnen

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, welche Bedingungen ein Zentralkraftfeld $\mathbf{F} = f(r)\ \mathbf{e}_r$ erfüllen muss, damit für ein Teilchen der Masse m stabile Kreisbahnen als Lösung der Bewegungsgleichung möglich sind. Stabil bedeutet hier, dass kleine Änderungen der Anfangsbedingungen auch nur zu kleinen Änderungen der Bahnkurve führen.

a) Stellen Sie zunächst die Bewegungsgleichung in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) auf. Beachten Sie dabei, dass Drehimpulserhaltung gilt. Leiten sie ab, welchen Wert der Drehimpuls annehmen muss, damit eine Kreisbahn vom Radius R Lösung ist?

(4 Punkte)

b) Untersuchen Sie die Stabilität der Kreisbahn aus a) gegenüber einer infinitesimalen radialen Störung ρ der Bahn, d.h. $r(t) = R + \rho(t)$, mit $|\rho|/|R| \ll 1$. Stellen Sie dazu zunächst die Bewegungsgleichung von ρ auf und entwickeln Sie diese nach Potenzen von ρ. Da die Störung infinitesimal ist, kann die Entwicklung nach dem linearen Glied in ρ abgebrochen werden. Zeigen Sie, dass dies in der folgenden Differentialgleichung für ρ resultiert:

$$\boxed{\ddot{\rho} + \left[-\frac{3f(R)}{mR} - \frac{f'(R)}{m}\right]\rho = 0.}$$

Wie sehen deren allgemeine Lösungen aus und warum sind dann Bahnen stabil, wenn

$$\boxed{\frac{3f(R)}{mR} + \frac{f'(R)}{m} < 0?}$$

Hinweis: Es gilt: $f(R+\rho) \approx f(R) + \rho f'(R)$ und $(1+x)^{-n} \approx 1 - nx$ für $x \ll 1$.

(4 Punkte)

c) Für welche Werte von n sind dann Kraftfelder der Form $f(r) = -c/r^n$ $(c > 0)$ stabil?

(2 Punkte)