

1. Test Theoretische Mechanik, WS 2020/21

12.12.2020

Aufgabe 1. (10+5 Punkte) Gegeben sei ein Teilchen (Masse m , Drehimpuls L), das sich unter Einfluß einer Zentralkraft $\vec{F}(r) = f(r)\vec{e}_r$ bewegt.

- a. Starten Sie vom Ausdruck $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ und zeigen Sie mit Hilfe von $\dot{\phi} = L/(mr^2)$, dass folgende Gleichung für $u = 1/r$ erfüllt ist:

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{L^2 u^2}{m} \left[\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u \right].$$

- b. (5 Zusatzpunkte) Bestimmen Sie die Kraft für $r(\phi) = a\sqrt{\cos 2\phi}$ (sogenannte Lemniskate). Tipp: Benutzen Sie $\cos^2 2\phi + \sin^2 2\phi = 1$.

Aufgabe 2. (15 Punkte) Betrachten Sie ein Pendel (Masse m), bei dem das Seil durch eine Feder (Ruhelänge ℓ_0 , Federkonstante k) ersetzt wird. Der Aufhängepunkt des Pendels wird zeitlich um $A \cos \omega t$ in horizontaler Richtung verschoben.

- a. Erstellen Sie eine Skizze.
b. Wie lauten die verallgemeinerten Koordinaten? Zeichnen Sie diese in der Skizze ein.
c. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und vereinfachen Sie diese so weit als möglich. Betrachten Sie sowohl die potentielle Energie der Feder als auch des homogenen Gravitationsfeldes.

Aufgabe 3. (15 Punkte) Ein Teilchen (Masse m), das sich in zwei Dimensionen bewegt, wird durch folgende Lagrangefunktion beschrieben (ω ist eine Konstante):

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega xy.$$

- a. Wie lauten die kanonischen Impulse p_x und p_y ?
b. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $H(x, y, p_x, p_y)$ und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.
c. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$. Benutzen Sie, dass eine dynamische Variable konstant ist (welche?) und betrachten Sie dann die Differentialgleichung für $\ddot{x}(t)$. Welche Form besitzt diese Gleichung?

Aufgabe 4. (10 Punkte) Betrachten Sie die fundamentalen Poissonklammern

$$\{r_i, r_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{r_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Benutzen Sie die Rechenregel $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$, um folgende Ausdrücke zu bestimmen:

- a. $\{r_i, L_j\}$,
b. $\{p_i, L_j\}$,
c. $\{Q_{ij}, L_k\}$ mit $Q_{ij} = \frac{1}{2}(r_i p_j + r_j p_i)$.