Theoretische Mechanik
Prof. Dr. Thomas Weiss

WiSe 2022/2023
Klausur 2

Hinweise: Lesen Sie sich zunächst die Aufgabenstellungen genau durch. Wenn Sie eine Teilaufgabe nicht lösen können, überlegen Sie sich, inwiefern Sie trotzdem mit Hilfe der angegebenen Zwischenergebnisse nachfolgende Teilaufgaben bearbeiten können. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 2.1: Perle in kugelförmiger Schale

Auf der Innenseite einer nach oben geöffneten halbkugelförmigen Schale mit Radius R kann eine Perle der Masse m unter dem Einfluss der homogenen Schwerkraft $-mg\mathbf{e}_z$ reibungsfrei gleiten.

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen. Stellen Sie hierzu den Ortsvektor in Kugelkoordinaten (R, θ, ϕ) dar und legen das Zentrum der Schale in den Ursprung. Begründen Sie über die Symmetrien, welche Größen erhalten sind. Verifizieren Sie die Erhaltungssätze dann mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen explizit.

(5 Punkte)

b) Die Lösung der Bewegung kann auch über die Erhaltungssätze gefunden werden. Führen Sie dazu die Lösung auf eine Integration über die z-Koordinate zurück. Lösen Sie das Integral nicht!

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass es eine horizontale Bahn für jede Höhe $-R \leq h < 0$ gibt, die der folgenden Gleichung genügt:

$$h\dot{\phi}^2 + g = 0.$$

Welchen Geschwindigkeitsbetrag v muss der Körper auf einer solchen Bahn haben? Setzen Sie diese in die Energie

$$E = \frac{m}{2}v^2 + mgh$$

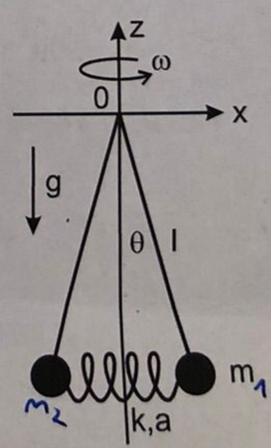
ein und drücken die Höhe h als Funktion der Energie aus.

Hinweis: Überlegen Sie sich, was die Energie unten in der Schale für einen Wert annimmt.

(3 Punkte)

Aufgabe 2.2: Rotierendes Doppelpendel

Zwei identische Massen seien jeweils an einem idealen (d.h. massefrei und nicht biegbar) Faden der Länge l am Koordinatenursprung aufgehängt und durch eine Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge $a < 2l$ verbunden (siehe Abbildung). Das Gesamtsystem befinde sich im Einfluss eines homogenen Schwerefeldes $-g\mathbf{e}_z$ und werde nun mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse gedreht.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung ab. Zwischenergebnis:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{k}{ml}(2l\sin\theta - a)\cos\theta = 0.$$

Hinweis: Machen Sie sich die Symmetrie des Systems zu nutze und verwenden Sie adaptiere Kugelkoordinaten (Skizze).

(3 Punkte)

Bitte wenden!

b) Bestimmen Sie nun die Gleichgewichtsauslenkungen der Massen für $g = 0$ (keine Schwerkraft) als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω. Welche minimalen und maximalen Auslenkwinkel θ resultieren daraus? Welche Anwendung könnte so ein System haben?

(3 Punkte)

c) Nehmen Sie nun wieder beliebige Werte für g an, d.h. $g \neq 0$. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsauslenkung θ_0 für $\omega^2 = 2k/m$. Lösen Sie nun die Bewegungsgleichung für kleine Abweichungen $\delta\theta = \theta - \theta_0$ allgemein.

Hinweis: Machen Sie eine Taylorentwicklung um θ_0 bis zur linearen Ordnung in $\delta\theta$, d.h. $f(\theta) \approx f(\theta_0) + f'(\theta_0)\,\delta\theta$ und verwenden Sie in dem Ergebnis der Taylorentwicklung die Beziehungen $\cos(\theta_0) = 1/\sqrt{1+\tan^2(\theta_0)}$ sowie $\sin(\theta_0) = \tan(\theta_0)/\sqrt{1+\tan^2(\theta_0)}$.

(4 Punkte)

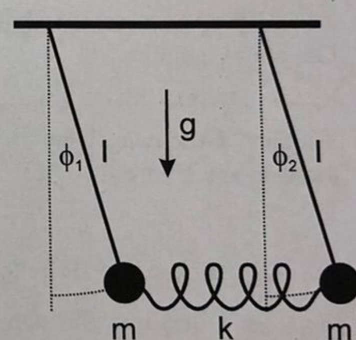
Aufgabe 2.3: Gekoppeltes Pendel

Gegeben seien zwei identische Fadenpendel mit angehängter Masse m, die durch eine Feder (Federkonstante k) miteinander verbunden sind und im homogenen Schwerefeld reibungsfrei schwingen (Skizze). Der Abstand der Aufhängepunkte sei identisch zur Ruhelänge der Feder.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für kleine Auslenkungen auf. Berücksichtigen Sie hierbei Terme bis zur zweiten Ordnung. Leiten Sie anschließend die Bewegungsgleichungen her. Zwischenergebnis:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a+b & -b \\ -b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind a und b Platzhalter für die exakten Ergebnisse. Wenn Sie Teilaufgabe (a) nicht lösen können, rechnen Sie einfach mit den Variablen a und b weiter.



(4 Punkte)

b) Machen Sie nun einen geeigneten Lösungsansatz und berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

(3 Punkte)

c) Die Normalschwingungen des Systems sind durch die Eigenvektoren gegeben. Bestimmen Sie diese Eigenvektoren. Wie sehen die zugehörigen Schwingungen aus? Wie können Sie daraus eine allgemeine Lösung konstruieren?

(3 Punkte)