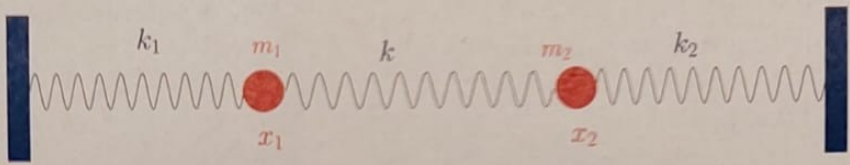
Theoretische Mechanik WS 2025/26, 2. Test

Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem neuen Zettel und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf dem Tisch dürfen nur das von uns zur Verfügung gestellte Schreibpapier, Stift, der Studierendenausweis, sowie das rot umrahmte Formelblatt liegen. Handgeschriebene Zettel auf dem Nebentisch müssen zugedeckt werden (außer der Formelsammlung).
Handys oder andere elektronische Geräte bitte ausschalten und in Ihrer Tasche lassen.
Wenn Sie eine Variable (Größe) verwenden, die nicht in den Angaben (evtl. in den Bildern) ist und noch nicht definiert wurde, müssen Sie diese als Funktion der angegebenen Variablen (und ggf. Zeitableitungen) definieren (ausgenommen, t, c, g).

K2.1 Gekoppelte Federn (14P)



Betrachten Sie ein System von zwei Massen m_1, m_2, die sich auf der x-Achse bewegen können und die untereinander und an zwei Wänden mit Federn verbunden sind (siehe Abb., wo die Federkonstanten k_i angegeben sind).
x_1 und x_2 bezeichnen die Auslenkungen der an den Federn verbundenen Massen, gemessen von der jeweiligen Gleichgewichtslage.
(a,3P) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen.
Ersatzausdruck für den Rest:

$$m_1\ddot{x}_1 = -a\,x_1 - b\,x_2 \qquad m_2\ddot{x}_2 = -a\,x_2 - b\,x_1$$

(b) Drücken Sie diese in folgender Matrix-Vektor Form aus:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}\,, \tag{1}$$

und bestimmen Sie die Matrizen $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{M}$.
(c,1P) Suchen Sie nach Lösungen der Form

$$\boldsymbol{x}(t) = \Re e\, e^{i\omega t}\boldsymbol{u}\,. \tag{2}$$

Welche Gleichung müssen ω und $\boldsymbol{u}$ erfüllen?
Ab hier setzten Sie $m_1 = m_2 = m$ und $k_1 = k_2 = k$
(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Frequenzen ω.
(e) Bestimmen Sie die zugehörige Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$. Für jeden Eigenvektor skizzieren Sie die entsprechende Auslenkungen.
(f) Schreiben Sie die allgemeine Lösung von (1)
(g) Bestimmen Sie die Lösung mit Anfangsbedingungen

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \qquad x_1(0) = x_2(0) = d$$

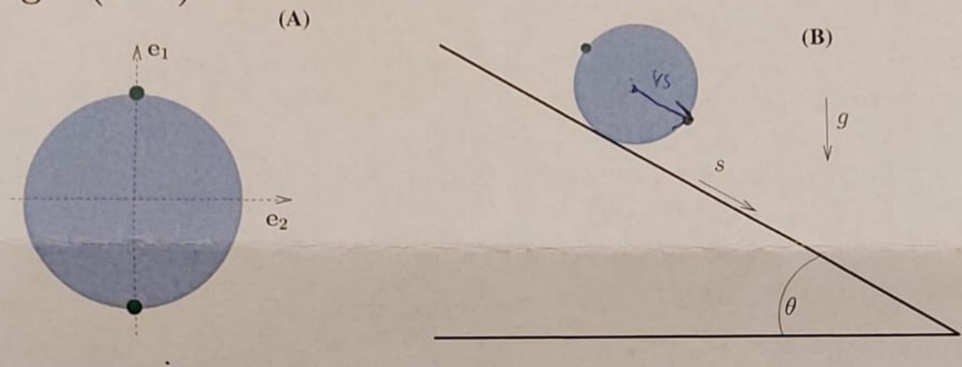
K2.2 Relativistische Kraft (10P)

Sie können hier $c = 1$ verwenden.
Die Räumliche Komponenten der Viererkraft für ein Teilchen mit Masse M lauten

$$K_1 = \gamma(t)\ F(t) \qquad K_2 = 0 \qquad K_3 = 0\,. \qquad \text{mit} \qquad F(t) = \ M\ \alpha\sqrt{t}\,,$$

Hier, $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-v(t)^2}}$, $v(t)$ ist der Betrag der Geschwindigkeit, und α eine Konstante.
(a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für die Raumkomponenten $\boldsymbol{p}$ vom relativistischen Impuls. Also $d\boldsymbol{p}/dt = (\cdots, \cdots, \cdots)$.
Die Geschwindigkeit des Teilchens bei $t = 0$ sei gegeben durch $\boldsymbol{v}(0) = (0, 0, v_0)$
(b) Bestimmen Sie $\boldsymbol{p}(0)$ (also, $\boldsymbol{p}$ bei $t = 0$).
(c) Bestimmen Sie $\boldsymbol{p}(t)$.
(d) Bestimmen Sie $p_0(t)$ und $\gamma(t)$.
(e) Bestimmen Sie $\boldsymbol{v}(t)$. Bestimmen Sie $v_z(t)$ für $t \to \infty$.
Hinweis: Beachten Sie die Beziehung zwischen $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{v}$, sowie die Beziehung zwischen Energie und Impuls (äquivalent $p_\mu p^\mu = \cdots$)

K2.3 Kugel (14P)



Betrachten Sie eine Kugel mit homogen verteilter Masse M und Radius R.
(a) Schreiben Sie das Integral in Kugelkoordinaten zur Bestimmung des Trägheitsmoments Θ_0 (für die Kugel sind alle 3 Trägheitsmomente gleich)
(b) Berechnen Sie dieses Integral und schreiben Sie Θ_0 als Funktion von R und M (**Hinweis:** $u = \cos\theta$ substituieren)
Falls Sie (b) nicht gelöst haben, können Sie einfach mit gegebenen Θ_0 weitermachen.
Auf den beiden Polen der Kugel sind nun zwei punktförmige Massen m angebracht.
(c) Bestimmen Sie nun das Trägheitsmoment Θ_1 für Drehungen um die polare Achse $\boldsymbol{e}_1$, und Θ_2 für Drehungen um eine Achse $\boldsymbol{e}_2$, die senkrecht dazu steht (beide Achsen laufen durch den Mittelpunkt der Kugel)

Kugel rollt

(Für diesen Teil müssen Sie nicht die Θ_i aus dem vorherigen Teil berechnet haben. Sie können diese einfach so verwenden)
Die Kugel rollt nun eine schiefe Ebene unter dem Einfluss der Gravitation hinunter (siehe Abb.). Die $\boldsymbol{e}_2$-Achse steht senkrecht zum Bild.
Verwenden Sie s als Koordinate (siehe Bild):
(d) bestimmen Sie die Rotation und Translationsenergie der Kugel.
(e) bestimmen Sie die potentielle Energie und Lagrangefunktion.
(f) schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen.
(g) lösen Sie diese mit Anfangsbedingungen $\dot{s}(0) = 0$, $s(0) = 0$