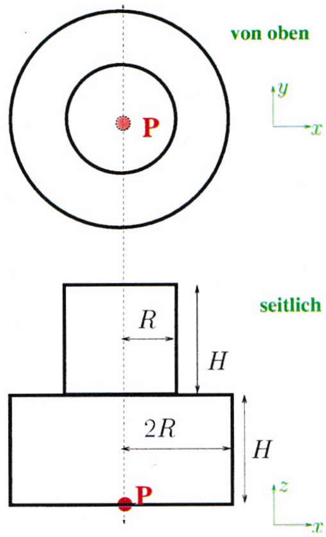
Name:
Matrikelnr: **Gruppe:**

Theoretische Mechanik WS 2021/22, 2. Teilklausur.

Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem neuen Zettel (K2.3 und K2.4 können zusammen) und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf dem Tisch dürfen nur das von uns zur Verfügung gestellte Schreibpapier, Stift, der Studierendenausweis, sowie das rot umrahmte Formelblatt liegen.
Handgeschriebene Zettel auf dem Nebentisch müssen zugedeckt werden (außer der Formelsammlung).
Handys bitte ausschalten und in Ihrer Tasche lassen.

K2.1 Trägheitsmomente (10P: 7+3)



(a) Bestimmen Sie die drei Hauptträgheitsmomente (in Bezug auf den Schwerpunkt des Gesamtsystem) eines Systems bestehend aus zwei homogenen Vollzylindern mit der gleichen Masse M und gleicher höhe H aber unterschiedlichen Radien R und $2R$, siehe Bild.
Hinweis: Trägheitsmomente eines Zylinders in Beug auf seinen Schwerpunkt: $\Theta_z = \frac{1}{2}mr^2 \qquad \Theta_x = \Theta_y = m\left(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}h^2\right)$, z ist die Achse des Zylinders.
Wegen der gleichen Massen ist die Position des Schwerpunktes sehr leicht zu ermitteln.
(b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente in Bezug auf den Punkt P im Bild.

K2.2 Schwingungen (12 P)

Ein System, beschrieben durch die Koordinaten x und y hat die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\left(4\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \alpha\left(\cos(2x) + \cos(y) + \cos(2x - y)\right)$$

(a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen im Fall kleiner x und y an. (Dazu schreiben Sie die Bewegungsgleichungen allgemein und entwickeln Sie die Winkelfunktionen).
(Ersatzausdruck für den Rest: $\ddot{x} = -4ax + ay \qquad \ddot{y} = -4ay + 4ax \qquad a > 0$).
(b) Führen Sie den Vektor $\boldsymbol{v} = (x, y)$ ein und schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform. Geben Sie die Matrizen an.
(c) Suchen Sie nach Lösungen der Form

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{u}e^{i\omega t}.$$

Welche Gleichungen müssen ω und $\boldsymbol{u}$ erfüllen (Matrixform, Determinante)?
(d) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{u}_1 = (1, 2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, -2)$ diese erfüllen. Finden Sie die zugehörigen ω_1 und ω_2.
(e) Schreiben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für $\boldsymbol{v}(t)$ (ggf. mit unbekannten ω_1, ω_2, falls Sie diese nicht bestimmen konnten).
(f) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung mit Anfangsbedingungen

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \qquad x(0) = 2 \quad y(0) = 0$$

Bitte wenden!

K2.3 Beschleunigung eines relativistischen Teilchens (9P)

Betrachten Sie im Inertialsystem eines Beobachters die Weltlinie eines Punktteilchens

$$x(t) = a\ t^2$$

bei der das Teilchen bis zur Maximalgeschwindigkeit $v_1 = \frac{c}{2}$ beschleunigt wird, wobei die Konstante $a > 0$.

Hinweis: Sie können stattdessen $x(t) = a\ t$ verwenden, aber in diesem Fall bekommen Sie nur maximal 2 Punkte aus (a) und 2 aus (c). In diesem Fall ist t_1 ein nicht zu bestimmender Parameter.

(a) Zeichnen Sie die angegebene Weltlinie in einem Minkowskidiagramm ein. Passen Sie auf die richtige Krümmung auf.

(b) Welche Zeit t_1 verstreicht im Inertialsystem des Beobachters, bis das Teilchen die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{c}{2}$ erreicht?

(c) Bestimmen Sie die Eigenzeit τ, also die Zeit, die vom Teilchen gemessen wird.
Hinweise: $\int d\tau = \int \gamma(t)^{-1}\ dt$
$\int_0^{x_1} \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{1}{2}(x_1\sqrt{1-x_1^2} + \arcsin x_1)$

K2.4 Hamiltonfunktion (7P (3+4))

Es sei folgende Lagrangefunktion gegeben. Dabei sind a, b, u positive Konstanten und x, y die verallgemeinerten Koordinaten.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(a\ \dot{x}^2 + b\ x^2\dot{y}^2\right) + \frac{u}{x^2+y^2}$$

Bestimmen Sie (a) die verallgemeinerten Impulse und (b) die Hamiltonfunktion.