Theoretische Mechanik WS 2021/22, 1. Klausur

Freitag, 26. November 2021, 17:30 Uhr, 37 Punkte

Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem neuen Zettel und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf dem Tisch dürfen nur das von uns zur Verfügung gestellte Schreibpapier, Stift, der Studierendenausweis, sowie das rot umrahmte Formelblatt liegen.
Handgeschriebene Zettel auf dem Nebentisch müssen zugedeckt werden (außer der Formelsammlung).
Handys bitte ausschalten und in Ihrer Tasche lassen.

K1.1 Kräfte und Potentiale (10 P.)

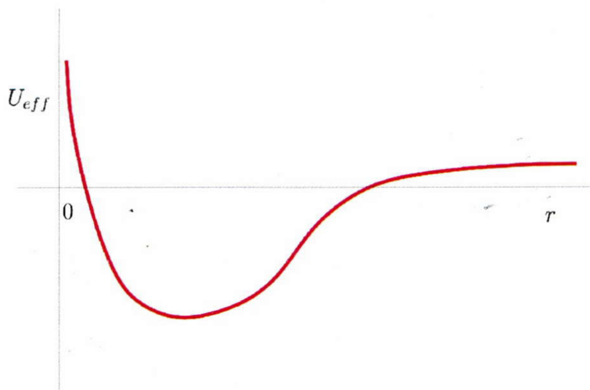
(a) Bestimmen Sie, ob die folgenden Kraftfelder

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}) = \alpha\ r^2\ \boldsymbol{e}_r$$
$$\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r}) = \beta\ (x\ \boldsymbol{e}_y -\ y\ \boldsymbol{e}_x)$$
$$\boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{r}) = \gamma\ (x\ \boldsymbol{e}_y + y\ \boldsymbol{e}_x)$$

jeweils konservativ sind, wobei die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

(b) Finden Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential.

K1.2 Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential (13 P.)



Eine Masse m bewegt sich im (dreidimensionalen) Zentralpotential

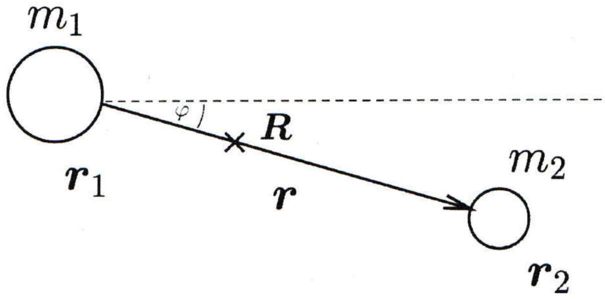
$$U(r) = -\tfrac{\alpha}{r} + U_0, \qquad \alpha, U_0 > 0.$$

Die Energie E und der Drehimpuls l der Masse seien gegeben.

(a) Bestimmen Sie das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$.
(Ersatzausdruck für den Rest: $U_{\text{eff}}(r) = A/r^2 - B/r + C, \qquad A, B, C > 0$)
(b) Für welche Werte von E gibt es gebundene Bahnen? Was ist der Minimalwert der Energie?
(c) Zeichnen Sie die Abbildung auf Ihren Zettel ab. Beschreiben Sie graphisch auf der abgezeichneten Abbildung eine gebundene Bahn.
Beschriften Sie explizit die Energie E und die Punkte mit Minimal- (r_1) und Maximalentfernung (r_2) zum Ursprung. (Beschriftungen am Angabeblatt zählen nicht!)
(d) Bestimmen Sie r_1 und r_2 explizit für die gegebene Energie E.

(e) Schreiben Sie einen integralen Ausdruck für die Zeit, die die Masse m braucht, um von r_2 wieder zu r_2 zu gelangen ("Schwingungsdauer").

K1.3 Hantel im homogenen Schwerefeld (14 P.)



Gegeben sei eine "Hantel" der Länge l aus den beiden Massen m_1 und m_2, die starr miteinander verbunden sind. Die Hantel bewegt sich in der xy-Ebene unter Einfluss eines homogenen Schwerefeldes $\boldsymbol{g} = -g\ \boldsymbol{e}_y$. Sie können die z-Komponente vernachlässigen.

(a) Wie viele Zwangsbedingungen gibt es? Schreiben Sie die Zwangsbedingung(en) als Funktion der kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$ und $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$ an. Wie viele Freiheitsgrade f besitzt das System?

(b) Formulieren Sie das Problem in den kartesischen Koordinaten des Schwerpunktes $\boldsymbol{R} = (X, Y)$ und des relativen Abstandes $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x, y)$. Das heißt, drücken Sie die beiden Massenpunkte $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ als Funktion von $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{r}$ aus.

(c) Schreiben Sie die kinetische Energien T_i und die potentielle Energien U_i der beiden Massenpunkte an, $(i = 1, 2)$. Zeigen Sie, von der Energien der Massenpunkte ausgehend, dass die kinetische Energie des Systems $T = \frac{M}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2$ ist und die potentielle Energie des Systems $U = MgY$ ist, wobei M die Gesamtmasse und μ die reduzierte Masse ist.

(d) Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinaten nun die kartesischen Koordinaten des Schwerpunktes $\boldsymbol{R} = (X, Y)$ und den Winkel φ, der zwischen der Horizontalen und der Hantel-Stange aufgespannt ist. Drücken Sie den relativen Abstand (x, y) als Funktion der verallgemeinerten Koordinate aus. Berechnen Sie die Geschwindigkeitskomponenten des relativen Abstandes $(\dot{x}, \dot{y})$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinate.
Schreiben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten an.

(e) Gibt es sogenannte *zyklische Koordinate(n)*, d.h. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$? Wenn ja, dann ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$$

eine Erhaltungsgröße. Finden Sie die entsprechende(n) Erhaltungsgröße(n). Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen.

(f) Finden Sie die allgemeine Lösung für die Bewegungsgleichungen.

$\overline{\text{K 1.1}}$ (10 P. total)

1) $\vec{F}_1(\vec{r}) = \alpha r^2 \hat{e}_r$

→ Zentralkraft → Konservativ

ODER ÜBER ROTOR: $\vec{r} = (x, y, z)$

$\hat{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\vec{F}_1(x,y,z) = \alpha (x^2+y^2+z^2)\, \hat{e}_r$$

$$= \alpha \sqrt{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F}_1 = \alpha \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \sqrt{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(rz) - \frac{\partial}{\partial z}(ry) \\ \frac{\partial}{\partial x}(rz) - \frac{\partial}{\partial z}(rx) \\ \frac{\partial}{\partial x}(ry) - \frac{\partial}{\partial y}(rx) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2}r^{-1}2yz & -\frac{1}{2}r^{-1}2zy \\ \frac{1}{2}r^{-1}2xz & -\frac{1}{2}r^{-1}2zx \\ \frac{1}{2}r^{-1}2xy & -\frac{1}{2}r^{-1}2yx \end{pmatrix} = \vec{0}$$

(2 P.)

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = -\nabla U(r) = -\hat{e}_r \frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

$$-\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \alpha r^2$$

$$U = -\frac{\alpha r^3}{3}$$

(2 P.)

2) $\vec{F}_2(\vec{r}) = \beta\left(x\,\hat{e}_y - y\,\hat{e}_x\right)$

$$\nabla \times \vec{F}_2 = \beta \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$ (2 P.)

NICHT KONSERVATIV

3) $\vec{F}_3(\vec{r}) = \gamma\left(x\,\hat{e}_y + y\,\hat{e}_x\right)$

$$\nabla \times \vec{F}_3 = \gamma \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$ (2 P.)

$$\vec{F}_3 = \gamma \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \gamma\left(-xy + C(y,z)\right)$$

$U = -\gamma xy$ (2 P.)

K1.2) (13 P. total)

a) Das effektive Potential kann direkt aus bekannter Formel hingeschrieben werden:

$$U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} + U_0$$

Ersatz:

$$U_{eff}(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} + C$$

$$A = \frac{\ell^2}{2m}, \quad B = \alpha, \quad C = U_0$$

ODER MIT HERLEITUNG:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right)$$

$$\ell = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{m r^2}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{\ell^2}{m^2 r^4}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} + U_0$$

(3 P.)

b) Gebundene Bahn für $E_{min} < E < U_0$

Minimalwert der Energie

$$\frac{\partial U_{eff}(r)}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0$$

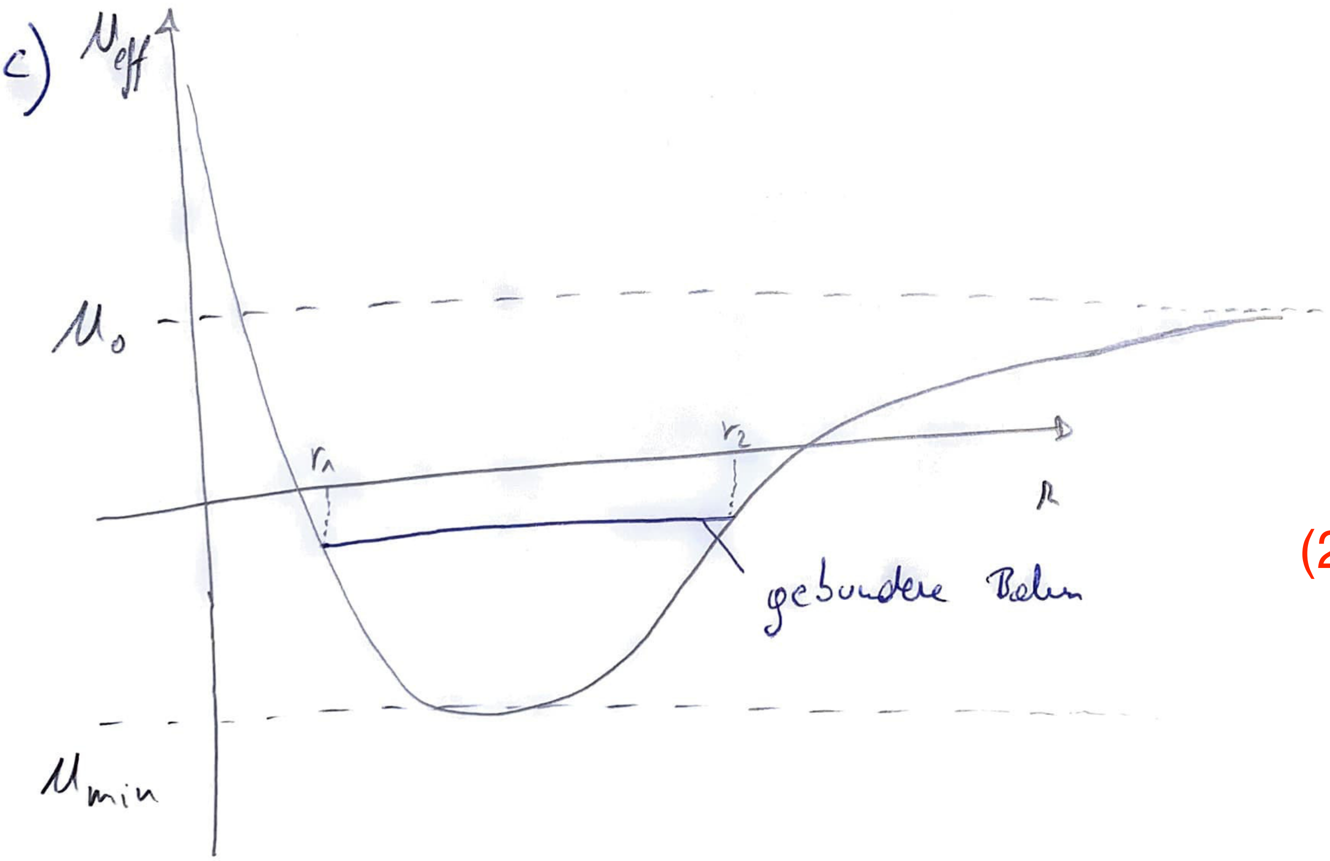
$$-2\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^2} = 0 \quad \rightarrow r_{min} = \frac{2A}{B} = \frac{\ell^2}{m\alpha}$$

(3 P.)

$$U_{eff,min} = U_{eff}(r_{min}) = \frac{\cancel{\ell^2}}{2\cancel{m}}\frac{\cancel{m^2}\alpha^2}{\cancel{\ell^4}\,\ell^2} - \alpha\frac{m\alpha}{\ell^2} + U_0$$

$$= U_0 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 m}{\ell^2} = U_0 - \frac{\alpha^2}{4A}$$

c)



(2 P.)

d) $E = U_{eff}$

$$= \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} + U_0$$

$$(U_0 - E) r^2 - B r + A = 0$$ (2 P.)

$$r_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4A(U_0 - E)}}{2(U_0 - E)}$$

e) Gesamtenergie $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)}$$

Periodendauer T:

$$T = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)}} dr$$ (3 P.)

$$= 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r} - U_0\right)}}$$

K 1.3) (14 P. total)

a) $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

z.B.: $|\vec{r}| = r = \text{const.}$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r^2$$

(2 P.)

$$f = 4 - 1 = 3$$

b) $\vec{r}$ ... Abstand

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{.... Schwerpunkt}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{R} - \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$$

$$\vec{r} + \vec{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{R} - \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{R} - \vec{r} \quad \Big| \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

(2 P.)

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

c) $$T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{R}}_2^{\,2}$$

$$= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2\dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\dot{\vec{r}}^2$$

$$= \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{\cancel{(m_1+m_2)}\,m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\dot{\vec{r}}^2$$

$$= \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

(2 P.)

$$U = g\left(m_1 y_1 + m_2 y_2\right)$$

$$= g\left(m_1\left(Y - \frac{m_2}{m_1+m_2}y\right) + m_2\left(Y + \frac{m_1}{m_1+m_2}y\right)\right)$$

$$= g\,M\,Y$$

d) $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \cos\varphi\,\dot\varphi \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{R}} = \begin{pmatrix} \dot X \\ \dot Y \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{M}{2}\left(\dot X^2 + \dot Y^2\right) + \frac{\mu}{2} r^2\dot\varphi^2\underbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}_{1} - M g Y$$

(3 P.)

e) X und φ kommen NICHT explizit in der Lagrange-Funk. vor.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = M \dot{X} = \text{const.}$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \rightarrow \ddot{X} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} \rightarrow \ddot{Y} + g = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

(3 P.)

f)

$$X(t) = X_0 + V_{X,0}\, t$$

$$Y(t) = Y_0 + V_{Y,0}\, t - g\frac{t^2}{2}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$$

(2 P.)