Prof. Dr. A. Maas
Institut für Physik

N A W I
G R A Z

Klausur zur Übung theoretische Mechanik

WS 2016/17

06. Februar 2017

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ ID Nummer: __________

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer. Zum bestehen der Klausur sind maximal 50 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K4a	K4b	K4c	K5a	K5b	K6a	K6b	Bonus	$\sum$	Note

Aufgabe K4: Arbeit (4+26+10 Punkte)

Gegeben ist im dreidimensionalen Raum in Kugelkoordinaten das Kraftfeld ($\lambda > 0$)

$$\vec{F}(r) = \frac{F_0}{r + \lambda} \vec{e}_r.$$

a) Ist das Kraftfeld konservativ?

b) Welche Arbeit wird in diesem Kraftfeld verrichtet, wenn ein Teilchen zunächst vom Ursprung entlang der positiven x-Achse um die Strecke R_0 verschoben wird und dann in einem Viertelkreis auf die negative y-Achse?

c) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn das Teilchen vom Ursprung um die Strecke R_1 auf der negativen y-Achse verschoben wird?

Aufgabe K5: Schwingungen (25+15 Punkte)

Betrachten Sie zwei gewöhnliche Pendel ungleicher Massen m_1 und m_2 und ungleicher Längen l_1 und l_2. In Ruhe hängen sie senkrecht entlang der z-Achse, beide am Anschlagspunkt $z = 0$, ihr Auslenkungswinkel gegen die z-Achse sei durch ϕ_1 und ϕ_2 gegeben. Es wirke ein homogenes Schwerefeld entlang der (negativen) z-Achse. Die beiden Pendeln seien darüberhinaus mit einer Feder mit Potential $\alpha(\phi_1 - \phi_2)^2/2$ gekoppelt. Ihr Abstand entlang der x-Achse spielt daher keine Rolle.

a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.

b) Stellen Sie die Lagrangegleichungen zweiter Art auf.

Aufgabe K6: Kanonische Transformationen (8+12 Punkte)

a) Ist $Q = 2(p+q^2)^3$, $P = -2(p-q^2)^3$ einen kanonische Transformation?

b) Welche kanonische Transformation ergibt sich für Q und P aus $F_2(q,P) = \cos(P+q)$?

Formelsammlung

$\frac{1}{(1+x)^n} \approx 1 - nx$ für $x \ll 1$; $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$; $\vec{p} = m\vec{v}$; $W = \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{F}$; $E = T + V$; $\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$; $\frac{d(T+V)}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$; $m\vec{a}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{cen} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{tr} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}\,') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}\,' + m\ddot{\vec{R}}\,'$; $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$; $g_{\mu\nu}k^\nu = k_\mu$; $g_{\nu\mu}k^\mu = k_\nu$; $g^{\nu\mu}k_\mu = k^\nu$; $g^{\mu\nu}k_\nu = k^\mu$; $\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)\frac{\vec{x}\vec{v}}{\vec{v}^2}\vec{v} - \gamma\vec{v}t$; $ct' = \gamma\left(ct - \frac{\vec{x}\vec{v}}{c}\right)$; $\vec{w}' = \frac{1}{1-\frac{vw_x}{c^2}}\left(w_x - v, \frac{w_y}{\gamma}, \frac{w_z}{\gamma}\right)^T$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = \frac{v}{c}$; $u^\mu = \gamma(v)(c,\vec{v})$; $m\frac{du^\mu}{d\tau} = K^\mu$; $dt = \gamma d\tau$; $K^\mu = \gamma(v)\left(\frac{\vec{F}\vec{v}}{c}, \vec{F}\right)$; $p^\mu = (E/c, \vec{p})$; $\vec{F} = \frac{Gm_1^g m_2^g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$; $\left(\vec{F}(\vec{x})\right)_i = -\partial_{x_i}V(\vec{x})$; $d_t^2\vec{r}(t) = -\frac{\alpha}{m}\vec{r}$; $\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = V_e(r)$; $M = \sum_i m_i$; $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$; $\vec{L} = \sum m_i\epsilon_{ijk}r_i\dot{r}_j\vec{e}_k$; $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$; $p + q = p' + q'$; $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{\text{Particles going into } d\Omega}{\text{Total incident particles}}$; $M_V = \int_V d^3\vec{r}\rho(r)$; $J = \int d^3\vec{r}\rho(\vec{r})\left|\epsilon_{ijk}\frac{\vec{\omega}_i}{\omega}\vec{r}_j\vec{e}_k\right|^2$; $V(x) \approx V(x_0) + d_xV(x)|_{x=x_0}(x-x_0) + d_x^2V(x)|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \mathcal{O}\left((x-x_0)^3\right)$; $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \Lambda(t)\vec{R}(t)$; $J_{ij} = \int d\vec{r}^3\rho(\vec{r})\left(\vec{r}^2\delta_{ij} - r_ir_j\right)$; $x^2 = \vec{x}^2 - c^2t^2$; $(x')_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$; $v_\mu g^{\mu\nu}v_\nu = v_\mu v^\mu$; $E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$; $(\vec{K}_i - d_t\vec{p}_i)\delta\vec{r}_i = 0$; $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$; $\left(d_t\frac{\partial T}{\partial d_tq_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0$; $L = T - V$; $d_t\frac{\partial L}{\partial d_tq_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$; $L = T - U$; $Q_i = d_t\frac{\partial U}{\partial d_tq_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$; $p_i = \frac{\partial L}{\partial d_tq_i}$; $f_{ji}(q_1,...,q_r,t)dq_i + f_j(q_1,...,q_r,t)dt = 0$; $d_t\frac{\partial L}{\partial d_tq_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \lambda_jf_{ji} = 0$; $\tilde{Q}_i = \lambda_jf_{ji}$; $\int_t^{t+\tau}Tdt = -\frac{n}{2}\int_t^{t+\tau}Vdt$; $\int_t^{t+\tau}Tdt = -\frac{1}{2}\int_t^{t+\tau}\vec{r}_i\vec{F}_idt$; $S[q] = \int_{t_1}^{t_2}dtL(t)$; $\delta S = 0$; $y(x) = y_s(x) + \alpha\eta(x)$; $S[q] = \int_{t_1}^{t_2}dt(T + \vec{K}_i\vec{r}_i)$; $g(u) = f(x) - ux = f(x) - x\frac{df}{dx}$; $f(x) = g(u(x)) + u(x)x$; $H(q_i,p_i,t) = p_id_tq_i(q_j,p_j) - L(q_i,p_i(q_j,p_j),t)$; $d_tq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$; $d_tp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$; $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$; $d_tH = \partial_tH$; $H = T+V$; $A = \int_{t_1}^{t_2}dtp_id_tq_i$; $S = \int_{\tau_1}^{\tau_2}L(x_\mu,u_\mu,\tau)d\tau$; $\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i$; $\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$; $\partial_tF_1(q_i(Q_i,P_i,t),Q_i,t) = h(Q_i,P_i,t) - H(q_i(Q_i,P_i,t),p_i(Q_i,P_i),t)$; $\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$; $\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i$; $\frac{\partial F_2}{\partial t} = h - H$; $\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i$; $\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = P_i$; $\frac{\partial F_3}{\partial t} = h - H$; $\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i$; $\frac{\partial F_4}{\partial P_i} = Q_i$; $\frac{\partial F_4}{\partial t} = h - H$; $\{f,g\}_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $d_tf = \{f,H\} + \partial_tf$; $\{q_j,q_k\} = 0$; $\{p_j,p_k\} = 0$; $\{q_j,p_k\} = \delta_{jk}$; $\{f,f\} = 0$; $\{f(q_j),g(q_k)\} = 0$; $\{f(p_j),g(p_k)\} = 0$; $\{c,g(p_j,q_j)\} = 0$; $\{f,g\} = -\{g,f\}$; $\{c_1f_1 + c_2f_2, f_3\} = c_1\{f_1,f_3\} + c_2\{f_2,f_3\}$; $\{f_1f_2,f_3\} = f_1\{f_2,f_3\} + \{f_1,f_3\}f_2$; $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$; $F_2 = q_iP_i + \epsilon G(q_i,P_i) \to \delta u = \epsilon\{u,G\}$; $H\left(q_i, \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, t\right) + \partial_tF_2 = 0$; $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_i} = \beta_i$; $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$; $F_2 = W'(q_1,...,q_{k-1}) + \sum_{i\geq k}\alpha_iq_i - Et$; $F_2 = \int dtL$; $J_i = \oint_\tau p_idq_i$; $\omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$; $J = J_1(\phi)J_3(\theta)J_1(\psi)$; $I_3\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = M_3$; $B_{ij} = V_{ij} - m_{ij}\omega^2$; $\det B = 0$; $\vec{\eta} = A\vec{\zeta}$; $\eta_i = \sum_k a_k^if_k\cos(\omega t + \delta_k)$; $S = \int dtL = \int dtd^3\vec{r}\mathcal{L}$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\eta} + \frac{d}{dr_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\eta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} = 0$; $\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\eta}$; $\mathcal{H} = \pi d_t\eta - \mathcal{L}$; $I = I_{\text{Schwerpunkt}} + ml^2$

Lösungen:

Aufgabe K4

a) Das Kraftfeld ist ein Zentralkraftfeld und hat keine Singularitäten. Es ist daher konservativ.

b) Der erste Teil des Weges kann parametrisiert werden durch $\vec{r}_1 = R_0 t \vec{e}_r$ mit $t \in [0,1]$ und festem $\phi = 0$ und $\theta = \pi/2$. Der zweite Teil der Strecke ist dann gegeben durch $\vec{r}_2 = R_0 \vec{e}_r$ mit dem Winkel $\phi \in [0, -\pi/2]$ und festem $r = R_0$ und $\theta = \pi/2$. Die Arbeit auf dem ersten Teil ist damit

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^1 \vec{F}(t)\frac{d\vec{r}_1}{dt}dt = R_0 \int_0^1 \vec{F}(t)\vec{e}_r dt = R_0 \int_0^1 \frac{F_0}{R_0 t + \lambda}dt = F_0 \ln\left(t + \frac{\lambda}{R_0}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= F_0 \ln\left(1 + \frac{R_0}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Auf dem zweiten Teil der Strecke gilt ($\theta = \pi/2$) $d_\phi \vec{r}_2 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)^T$. Skalar mit $\vec{e}_r$ multipliziert ergibt dies jedoch Null. Der zweite Teil des Weges liefert also keinen Beitrag.

c) Diese Wegstrecke zusammen mit dem Weg aus (b) sind ein geschlossener Weg für $R_0 = R_1$. Da das Kraftfeld konsveravtiv ist, muß die Gesamtarbeit auf diesem Weg Null sein. Damit ist dann die verrichtete Arbeit $--W_0$ (der Weg wird entgegengesetzt durchlaufen), wobei R_0 durch R_1 ersetzt wurde,

$$W_1 = F_0 \ln\left(1 + \frac{R_1}{\lambda}\right).$$

Alternative kann man wegen der sphärischen Symmetrie auch argumentieren, daß die Arbeit für Verschiebungen entlang der x- und der y-Achse gleich sein muss.

Aufgabe K5

a) Beide haben dieselbe individuelle Lagrangefunktion

$$L_i = \frac{m_i}{2} l_i^2 (d_t \phi)^2 + m_i g l_i \cos\phi_i,$$

was, zusammen mit dem Kopplungspotential, auf

$$L = \sum_i \left(\frac{m_i}{2} l_i^2 (d_t\phi)^2 + m_i g l_i \cos\phi_i\right) - \frac{\alpha}{2}(\phi_1 - \phi_2)^2.$$

als Lagrangefunktion führt.

b) Diese lassen sich aus den Lagrangegleichungen zweiter Art bestimmen

$$m_i l_i d_t^2 d_t^2 \phi_i + m_i g l_i \sin\phi_i + (-1)^{i+1}\alpha(\phi_1 - \phi_2) = 0.$$

Aufgabe K6

a) Die Poissonklammern $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$, weil die Poissonklammern einer Funktion mit sich selbst immer verschwindet. Damit bleibt

$$\begin{aligned}
\{Q, P\} &= \{2(p+q^2)^3, -2(p-q^2)^3\} \\
&= (12q(p+q^2)^2)(-6(p-q^2)^2) - (6(p+q^2)^2)(12q(p-q^2)^2) = -144q(p-q^2)^2(p+q^2)^2.
\end{aligned}$$

Die Transformation ist nicht kanonisch.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P} = -\sin(q+P) \\
p &= \frac{\partial F_2}{\partial q} = -\sin(q+P)
\end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst $Q = p$. Auflösen der zweiten Gleichung nach P liefert

$$P = -\left(q + \sin^{-1}(p)\right),$$

wobei implizit angenommen wurde, daß die Variablen passend periodisch sind. Ansonsten gibt es Uneindeutigkeiten.