Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen

Abschlussklausur, 8. Februar 2018

Name:

Matrikelnummer:

Frage 1:	Punkte
Frage 2:	Punkte
Frage 3:	Punkte
Frage 4:	Punkte
Frage 5:	Punkte
Frage 6:	Punkte
Gesamt:	Punkte

KFU Graz
TU Graz
W. Schweiger

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen
WS 17/18

Abschlussklausur, 8. Februar 2018

Versuchen Sie die nachfolgenden Fragen (unter Verwendung der mathematischen Schreibweise) so kurz und präzise wie möglich zu beantworten und keine Romane zu schreiben!

Frage 1: (Funktionenräume) In der Vorlesung kamen, unter anderem, folgende Funktionenräume vor: $L^2(\mathbb{R})$, $C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $S(\mathbb{R})$.

a) Erklären Sie kurz, was die definierenden Eigenschaften dieser Räume sind.

b) Ordnen Sie die Räume vom kleinsten zum größten (Teilmengenrelation).

c) Wie ist das Skalarprodukt üblicherweise erklärt, das diese Räume zu Praehilberträumen macht?

d) Welche Eigenschaft zeichnet $L^2(\mathbb{R})$ im Vergleich zu den anderen Räumen aus und macht diesen Raum zu einem Hilbertraum? Erklären Sie diese Eigenschaft.

e) Welche Eigenschaften besitzt eine Orthonormalbasis eines separablen Hilbertraums?

f) Wie sieht die 2. Parseval'sche Identität aus?

(8 Punkte)

Frage 2: (Fourierreihen) Es sei $f \in L^2[-\pi, \pi]$.

a) Wie sieht die **komplexe Form** der Fourierreihe von f aus und wie berechnet man die Fourierkoeffizienten c_n?

b) In welchem Sinn konvergiert die Fourierreihe gegen f und was passiert an Sprungstellen von f?

c) Welche Relation erfüllen die Fourierkoeffizienten, wenn f eine reellwertige Funktion ist? Beweisen Sie die Relation.

(6 Punkte)

Frage 3: (Fouriertransformation) Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$.

a) Wie sieht die Fouriertransformation von f aus?

b) Welche Eigenschaften besitzt die Fouriertransformierte $\tilde{f} = FT(f)$, wenn für f nur $f \in L^1(\mathbb{R})$ vorausgesetzt wird?

c) Wie sieht die inverse Fouriertransformation (sofern sie existiert) aus?

d) Für welchen Funktionenraum stellt die Fouriertransformation einen Isomorphismus dar?

e) Angenommen, es sei $FT(f) = FT(g)FT(h)$. Wie hängt dann f mit g und h zusammen?

(6 Punkte)

Frage 4: (Funktionale und Distributionen)
V sei ein Vektorraum über dem Skalarenkörper $\mathbb{K}$.

a) Was ist ein Funktional?

b) Distributionen sind spezielle Funktionale. Auf welchem Vektorraum sind Distributionen definiert und welche beiden Forderung müssen sie erfüllen?

c) Was ist eine reguläre Distribution und was versteht man unter dem “Kern” einer regulären Distribution?

d) Wie ist die Ableitung einer (nicht notwendigerweise regulären) Distribution definiert?

e) Der Kern der Stufenfunktion θ_{x_0} ist $\theta(x - x_0)$. Was ist der Kern der Ableitung der Stufenfunktion θ'_{x_0}? Begründen Sie Ihre Antwort.

(7 Punkte)

Frage 5: (Lineare Operatoren) Es sei $\hat{A} = (D, A)$ ein dicht definierter linearer Operator in einem (komplexen) Hilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. eine lineare Abbildungen $A : D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

a) Wann ist $\hat{A}$ ein **beschränkter** Operator?

b) Was können Sie über den Definitionsbereich eines beschränkten linearen Operators sagen?

c) Wie ist die Norm $||A||$ für einen beschränkten linearen Operator definiert?

d) Nennen Sie 2 Klassen vom beschränkten linearen Operatoren. Was sind ihre definierenden Eigenschaften?

e) Wie würden Sie $(1 - A)^{-1}$ für einen beschränkten linearen Operator $\hat{A}$ mit $||A|| < 1$ berechnen?

(6 Punkte)

Frage 6: (Partielle Differenzialgleichungen) Die allgemeinste semilineare partielle DGL 2. Ordnung in 2 Variablen lässt sich in der Form

$$A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + F(x, y, u_x, u_y, u) = 0$$

schreiben.

a) Welche Einschränkungen müssen die Koeffizienten A, B und C erfüllen, damit diese DGL elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist?

b) Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel für eine lineare parabolische DGL 2. Ordnung?

c) Auf welche Gleichungen führt die Separation der Variablen, wenn Sie diese auf Ihr Beispiel aus Punkt b) anwenden?

d) Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x, t) = 0 \quad \text{ist} \quad u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)\,,$$

wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ 2-mal stetig differenzierbare Funktionen des Arguments z sein sollen. Wie müssen φ und ψ gewählt werden, damit die **Anfangsbedingungen** $u(x, 0) = f(x)$ und $\partial u(x, 0)/\partial t = 0$ gelten? Wie sieht $u(x, t)$ aus?

(7 Punkte)