Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen

Abschlussklausur, 4. Februar 2016

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1:	Punkte
Aufgabe 2:	Punkte
Aufgabe 3:	Punkte
Aufgabe 4:	Punkte
Aufgabe 5:	Punkte
Aufgabe 6:	Punkte
Gesamt:	Punkte

KFU Graz
TU Graz
W. Schweiger

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen WS 15/16

Abschlussklausur, 4. Februar 2016

Versuchen Sie die nachfolgenden Fragen (unter Verwendung der mathematischen Schreibweise) so kurz und präzise wie möglich zu beantworten und keine Romane zu schreiben!

Frage 1: (Hilberträume) $\mathcal{H}$ sei ein komplexer Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ definiert ist.

a) Wie ist die Norm $||x||$, $x \in \mathcal{H}$, definiert, die durch das Skalarprodukt induziert wird?

b) Was ist neben der Existenz eines Skalarproduktes noch notwendig, damit aus dem Vektorraum $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum wird? Was bedeutet diese zusätzlich notwendige Eigenschaft.

c) Nennen Sie ein Beispiel für einen ∞-dimensionalen Hilbertraum und das zugehörige Skalarprodukt.

d) Kennt man in einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, so lassen sich beliebige $f \in \mathcal{H}$ in der Form

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, f$$

ausdrücken. Wie berechnet man die c_i?

e) Was besagt die 1. Parseval'sche Identität?

f) Wie sieht die Orthonormalbasis von $L^2[-\pi, \pi]$ aus, die zur komplexen Form der Fourierreihe führt?

(8 Punkte)

Frage 2: (Integraltransformationen) $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion vom exponentiellen Typ.

a) Wie ist die Laplace-Transformation $L(f)(p)$ von f definiert?

b) Wie hängt $L(f')(p)$ mit $L(f)(p)$ zusammen, wenn $f'(t) = df(t)/dt$ die Ableitung von f ist?

c) Wie kann man mit Hilfe der Laplace-Transformation Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen lösen?

d) Die Laplace-Transformierten zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ seien $F(p)$ bzw. $G(p)$. Wie sieht die inverse Laplace-Transformierte des Produktes von F und G, also $L^{-1}(F \cdot G)(t)$, aus?

(5 Punkte)

Frage 3: (Funktionale und Distributionen)
V sei ein Vektorraum über dem Skalarenkörper $\mathbb{K}$.

a) Was ist ein Funktional auf V?

b) Wie ist ein lineares Funktional definiert und was ist der Dualraum von V?

c) Geben Sie ein Beipiel für ein **nichtlineares** Funktional auf $C[a, b]$.

d) Lineare Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind zweifellos stetig. Wie verhält es sich mit linearen Funktionalen auf einem beliebigen endlich- oder unendlichdimensionalen Vektorraum V?

e) Auf welchem Vektorraum sind Distributionen definiert und welche Forderung müssen sie zusätzlich zur Linearität erfüllen?

f) Wie wirkt die Ableitung der Dirac'schen Deltadistribution δ'_{x_0} auf eine Testfunktion?

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0 x}$ sei der Kern einer Distribution F. Wie sieht der Kern der Fouriertransformierten $FT(F)$ aus?

(9 Punkte)

Frage 4: (Orthogonale Funktionensysteme) In der Vorlesung wurden (reelle) Funktionensysteme $\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ besprochen, die in einem Teilintervall von $\mathbb{R}$ Orthogonalitätsrelationen der Form

$$\int_a^b dx \rho(x) f_i(x) f_j(x) = N_i \, \delta_{ij}$$

erfüllen, wobei $\rho(x)$ eine (positive) Gewichtsfunktion ist und N_i ein geeigneter Normierungsfaktor.

a) Was sind die Werte von a und b für Legendre-Polynome und wie sieht der zugehörige Gewichtsfaktor $\rho(x)$ aus? Bei welchen physikalischen Problemen braucht man Legendre-Polymome?

b) Was sind die Werte von a und b für Hermite-Polynome und wie sieht der zugehörige Gewichtsfaktor $\rho(x)$ aus? Wo tauchen Hermite-Polynome in der Physik auf?

c) Nennen Sie zumindest 2 Methoden, mit deren Hilfe sich solche orthogonalen Funktionensysteme gewinnen lassen.

d) Auch in 2 Dimensionen lassen sich orthogonale Funktionensysteme angeben. Nennen Sie ein Beispiel (unter Angabe des Bereichs, in dem diese Funktionen definiert sind und der Orthogonalitätsrelation).

(5 Punkte)

Frage 5: (Lineare Operatoren) Ein linearer Operator $\hat{A} = (D, A)$ in einem (komplexen) Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein lineare Abbildungen $A : D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

a) Wann ist der Operator $\hat{A}$ dicht definiert?

b) Wie führt man den adjungierte Operator $\hat{A} = (D^*, A^\dagger)$ zu einem dicht definierten Operator $\hat{A} = (D, A)$ ein? Was können Sie über seine Existenz und Eindeutigkeit sagen?

c) Was ist ein symmetrischer Operator und wann ist ein symmetrischer Operator selbstadjungiert?

d) Wie ist die Norm eines beschränkten Operators $\hat{A} = (D, A)$ üblicherweise definiert?

e) Für einen beschränkten Operator $\hat{A} = (D, A)$ sei $||A|| < 1$. Wie könnten Sie dann $(1 - A)^{-1}$ berechnen?

f) Was versteht man unter der **Resolventenmenge** $\rho(\hat{A})$ eines linearen Operators $\hat{A} = (D, A)$, was unter seinem **Spektrum** $\sigma(\hat{A})$?

(6 Punkte)

Frage 6: (Partielle Differenzialgleichungen)

a) Wie sieht die allgemeinste lineare, partielle Differenzialgleichung 2. Ordnung in 2 Variablen aus?

b) Wann ist diese Differenzialgleichung elliptisch?

c) Geben Sie ein Beispiel für eine elliptische partielle DGL 2. Ordnung.

d) Was muss man zusätzlich forden, um die Lösung einer elliptischen partielle DGL 2. Ordnung eindeutig festzulegen.

e) Nennen Sie eine Lösungsmethode für partielle Differentialgleichungen und beschreiben Sie kurz (an Hand eines Beispiels), wie diese funktioniert.

(7 Punkte)