UNI Graz
TU Graz

Funktionalanalysis WS 2021/22

Schriftliche Prüfung, 1. Februar 2022

Versuchen Sie die nachfolgenden Fragen (unter Verwendung der mathematischen Schreibweise) so kurz und präzise wie möglich zu beantworten und keine Romane zu schreiben!

Aufgabe 1: (Hilberträume) $\mathcal{H}$ sei ein komplexer Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ definiert ist.

a) Wie ist die Norm $||x||$, $x \in \mathcal{H}$, definiert, die durch das Skalarprodukt induziert wird?

b) Nennen Sie ein Beispiel für einen ∞-dimensionalen Hilbertraum und das zugehörige Skalarprodukt.

c) Was muss man tun, um aus dem Vektorraum $C[a, b]$ der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_a^b dx\, f^*(x)g(x)$, einen Hilbertraum zu machen und bei welchem Hilbertraum landet man dann?

d) Was bedeutet es, wenn ein Hilbertraum "separabel" ist?

e) Kennt man in einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, so lassen sich beliebige $f \in \mathcal{H}$ in der Form $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, e_i$ ausdrücken. Wie berechnet man die Koeffizienten α_i?

f) Was besagen die beiden Parseval'schen Identitäten?

(8 Punkte)

Aufgabe 2: (Fourierreihen)

a) Wie lässt sich die Tatsache, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch mit Periodenlänge L ist, mathematisch am einfachsten formulieren?

b) Es sei nun $f \in L^2[-\pi, \pi]$.Wie sieht die **reelle Form** der Fourierreihe von f aus und wie berechnet man die Fourierkoeffizienten a_n und b_n?

c) In welchem Sinn konvergiert die Fourierreihe gegen f, wenn $f \in L^2[-\pi, \pi]$? Erklären Sie diesen Konvergenzbegriff näher.

d) Was besagt die 1. Parseval'sche Identität über den Zusammenhang zwischen $||f||$ und den Fourierkoeffizienten a_i und b_i?

e) Welche Einschränkungen gelten für die Fourierkoeffizienten a_n, b_n, wenn f eine rein reelle bzw. eine rein imaginäre Funktion ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(7 Punkte)

Aufgabe 3: (Integraltransformationen)

a) Wie ist die Fouriertransformation für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ definiert? Beachten Sie, dass hier $f : \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \to f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die von 3 Variablen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ abhängt!

b) Sei nun $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ und $\Delta f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, wobei Δ der Laplaceoperator ist. Wie sieht die Fouriertransformation von Δf aus?

c) Für welchen Unterraum von $L^1(\mathbb{R})$ stellt die Fouriertransformation eine bijektive Abbildung dar? Was sind die definierenden Eigenschaften dieses Unterraums? Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die in diesem Raum liegt.

d) Wie sieht das (beidseitige) Faltungsintegral $(f_1 * f_2)(x)$ aus und welcher Zusammenhang besteht zwischen der Fouriertransformation des Faltungsintegrals $FT(f_1 * f_2)(p)$ und den Fouriertransformationen $FT(f_i)(p)$ der einzelnen Funktionen?

(8 Punkte)

Aufgabe 4: (Funktionale und Distributionen)
V sei ein Vektorraum über dem Skalarenkörper $\mathbb{K}$.

a) Was ist ein lineares Funktional auf V, was der (algebraische) Dualraum von V?

b) $\mathcal{H}'$ sei der Raum der **stetigen** linearen Funktionale auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wie hängt dieser Raum mit $\mathcal{H}$ zusammen (Stichwort: Darstellungssatz von Riesz-Frechét)?

c) Ordnen Sie die Testfunktionenräume $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $\mathcal{S} = S(\mathbb{R})$ vom kleinsten bis zum größten (Teilmengenrelation).

d) Ordnen Sie die Dualräume $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ der obigen Räume vom kleinsten bis zum größten.

e) Was ist eine **Distribution**?

f) Wie wirkt die zweifache Ableitung der Heavisidedistribution θ''_{x_0} (die Heavisidefunktion $\theta(x - x_0)$ ist Kern von θ_{x_0}) auf eine Testfunktion $\phi \in \mathcal{D}$?

(8 Punkte)