1. Teil

In diesem Teil werden nur die Lösungen bewertet. Jede Frage kann mit wahr (w) oder falsch (f) beantwortet werden. Es werden nur diese Symbole (w) und (f) als gültige Antworten in der Tabelle unten gewertet. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Gar nicht oder ungültig beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe liegt immer zwischen 0 und 2 Punkten.

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator mit $\operatorname{dom} T = \mathcal{H}$ welcher

$$(Tx, y)_{\mathcal{H}} = (x, Ty)_{\mathcal{H}} \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

erfülle. Welche der folgenden Aussagen sind für jeden solchen Operator wahr **(w)** oder im Allgemeinem falsch **(f)**?

Aussage:	(w) oder (f)
T ist selbstadjungiert	W
Das Spekrum von T ist nicht-negativ	F
T ist beschränkt	W
T hat zumindest einen Eigenwert	F

Bitte wenden!

2. Teil

Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

(3 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\ell^2(\mathbb{N})$ der Raum der quadratsummierbaren Folgen über $\mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass durch

$$\Big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)_e := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} x_n \overline{y_n} \quad \text{mit} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$$

ein Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{N})$ definiert wird.

(ii) Untersuchen Sie, ob die Folgen

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, 0, 0, \ldots) \quad \text{und} \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(e, 2e^2, e^3, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$$

orthogonal zueinander bezüglich $(\cdot,\cdot)_e$ sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $L^2(-1,1)$ der Hilbertraum der auf $(-1,1)$ quadratintegrierbaren Funktionen.

(i) Definieren Sie den Begriff der schwachen Ableitung für eine Funktion $f \in L^2(-1,1)$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 1 - |x|$, $x \in (-1,1)$, schwach differenzierbar ist, und bestimmen Sie die schwache Ableitung von f.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

Gegeben sei der Laplace-Operator $T : L^2(-\pi,\pi) \to L^2(-\pi,\pi)$, definiert durch

$$Tf = -f'' \quad \text{mit} \quad \operatorname{dom} T = \{f \in H^2(-\pi,\pi) \mid f(-\pi) = -f(\pi) \text{ und } f'(-\pi) = -f'(\pi)\}$$

mit antiperiodischen Randbedingungen.

(i) Zeigen Sie $(Tf, f)_{L^2} \geq 0$ für alle $f \in \operatorname{dom} T$. Ist T symmetrisch?

(ii) Verwenden Sie (i) um zu zeigen, dass alle Eigenwerte von T nicht-negativ sind.

(iii) Bestimmen Sie das Punktspektrum $\sigma_p(T)$ von T.

(3 Punkte)

Aufgabe 5:

(i) Geben Sie die Definition des Schwartzraums $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ an.

(ii) Definieren Sie die Fouriertransformation $\mathcal{F}[f]$ für Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(iii) Zeigen Sie die Rechenregel $\mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{a}\mathcal{F}[f](\frac{\xi}{a})$ für festes $a > 0$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.