# Funktionalanalysis (für PhysikerInnen)

Musterklausur

Name:

Matrikelnummer:

Platz Nr.:

---

| | |
|---|---|
| Aufgabe 1: | Punkte |
| Aufgabe 2: | Punkte |
| Aufgabe 3: | Punkte |
| Aufgabe 4: | Punkte |
| Aufgabe 5: | Punkte |
| Gesamt: | Punkte |

UNI Graz
TU Graz

# Funktionalanalysis **WS 21/22**

**Musterklausur**

**Aufgabe 1: (Funktionenräume)** $\mathcal{H}$ sei ein komplexer Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle\, .\,,\, .\,\rangle$ definiert ist.

a) Welche zusätzliche Eigenschaft macht diesen Innenproduktraum zu einem Hilbertraum und was bedeutet diese Eigenschaft?

b) Wie können Sie die Tatsache, dass $B = \{b_1, b_2, \ldots\} \subset \mathcal{H}$ ein **Orthonormalsystem** darstellt mathematisch kurz und bündig schreiben?

c) Es sei nun $\mathcal{H}$ ein **separabler** Hilbertraum. Geben Sie zumindest 2 (äquivalente) Kriterien dafür an, dass ein Orthonormalsystem $B \subset \mathcal{H}$ auch eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ darstellt.

d) In der Vorlesung wurden (reelle) Polynomsysteme $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ besprochen, die in einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Orthogonalitätsrelationen der Form
$$\langle p_i, p_j\rangle = \int_a^b dx \rho(x)\, p_i(x) p_j(x) = N_i\, \delta_{ij}$$
erfüllen, wobei $\rho(x)$ eine (positive) Gewichtsfunktion ist und $N_i$ ein geeigneter Normierungsfaktor. Was sind die Werte von $a$ und $b$ für Legendre-Polynome und wie sieht die zugehörige Gewichtsfunktion $\rho(x)$ aus? Wo tauchen Legendre-Polynome in der Physik auf?

**(8 Punkte)**

**Aufgabe 2: (Fourierreihen)** Es sei $f \in L^2[-\pi, \pi]$.

a) Wie sieht die **komplexe Form** der Fourierreihe von $f$ aus und wie berechnet man die Fourierkoeffizienten $c_n$?

b) Es sei nun $f$ eine **gerade** Funktion, $f(x) = f(-x)$. Wie hängen in diesem Fall die Fourierkoeffizienten $c_n$ und $c_{-n}$ zusammen? Beweisen Sie Ihr Ergebnis.

c) Nennen Sie zumindest ein Konvergenzkriterium, das die **punktweise Konvergenz von** $f$ sicherstellt. Erklären Sie "punktweise Konvergenz" näher. Was passiert bei punktweiser Konvergenz an den Sprungstellen von $f$?

**(8 Punkte)**

**Aufgabe 3: (Integraltransformationen)**

a) Wie ist die Fouriertransformation für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ definiert? Beachten Sie, dass hier $f : \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \to f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die von 3 Variablen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ abhängt!

b) Sei nun $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$ und $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, wobei $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Wie sieht die Fouriertransformation von $f''$ aus?

c) Für welchen Unterraum von $L^1(\mathbb{R})$ stellt die Fouriertransformation eine bijektive Abbildung dar? Was sind die definierenden Eigenschaften dieses Unterraums? Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die in diesem Raum liegt.

d) Wie sieht das (beidseitige) Faltungsintegral $(f_1 * f_2)(x)$ aus und welcher Zusammenhang besteht zwischen der Fouriertransformation des Faltungsintegrals $FT(f_1 * f_2)(p)$ und den Fouriertransformationen $FT(f_i)(p)$ der einzelnen Funktionen?

**(8 Punkte)**

**Aufgabe 4: (Funktionale und Distributionen)**

$V$ sei ein Vektorraum über dem Skalarenkörper $\mathbb{K}$.

a) Was ist ein Funktional auf $V$?

b) Was zeichnet ein lineares Funktional aus und was ist der Dualraum von $V$?

c) Geben Sie ein Beipiel für ein **nichtlineares** Funktional auf $C[a, b]$.

d) Lineare Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind zweifellos immer auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Sind auch lineare Funktionale auf einem beliebigen unendlichdimensionalen Vektorraum $V$ immer stetig? Mit welcher weiteren Eigenschaft einer Abbildung ist Stetigkeit eng verknüpft?

e) Auf welchem Vektorraum sind Distributionen definiert und welche Forderung müssen sie zusätzlich zur Linearität erfüllen?

f) Wie wirkt die Ableitung der Dirac'schen Deltadistribution $\delta'_{x_0}$ auf eine Testfunktion?

**(8 Punkte)**

**Aufgabe 5: (Lineare Operatoren)** Ein linearer Operator $\hat{A} = (D, A)$ in einem (komplexen) Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein lineare Abbildungen $A : D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

a) Wann ist $\hat{A}$ ein **beschränkter** Operator?

b) Was können Sie über den Definitionsbereich eines dicht definierten, beschränkten linearen Operators sagen?

c) Nennen Sie 2 Klassen von beschränkten linearen Operatoren (auf $\mathcal{H}$). Was sind ihre definierenden Eigenschaften?

d) Was muss man für die beiden beschränkten Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ fordern, damit

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}}$$

gilt? Skizzieren Sie die Beweisidee!

e) Was versteht man unter der **Resolventenmenge** $\rho(\hat{A})$ eines linearen Operators $\hat{A} = (D, A)$, was unter seinem **Spektrum** $\sigma(\hat{A})$?

**(8 Punkte)**

**Viel Glück!**