1. Teil

In diesem Teil werden nur die Lösungen bewertet. Jede Frage kann mit wahr (w) oder falsch (f) beantwortet werden. Es werden nur diese Symbole (w) und (f) als gültige Antworten in der Tabelle unten gewertet. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Gar nicht oder ungültig beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe liegt immer zwischen 0 und 4 Punkten.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und K ein kompakter Operator in $\mathcal{H}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr **(w)** oder falsch **(f)**?

$\dim \mathcal{H} = 0$

Aussage:	(w) oder (f)	
K kann unbeschränkt sein	f	✓
0 ist ein Eigenwert von K	w	✗
Das Bild von K ist endlichdimensional	f	✓
$\sigma(K)$ ist beschränkt	w	✓

Bitte wenden!

2. Teil

Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) := x, \quad f_2(x) := x^2 \quad \text{und } f_3(x) := x^3$$

im Hilbertraum $L^2(-1,1)$. Untersuchen Sie welche dieser Funktionen orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Der lineare Operator $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ sei definiert durch

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots).$$

(i) Zeigen Sie, dass T ein beschränkter Operator ist und geben Sie eine obere Schranke für die Operatornorm $\|T\|$ an.

(ii) Entscheiden Sie, ob es sich bei T um eine Orthogonalprojektion handelt.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.

(i) Geben Sie die Definition von $\ker(T)$ und $\operatorname{ran}(T)$ an.

(ii) Sei $\mathcal{H} = \mathcal{G} = L^2(0,1)$ und $(Tf)(x) := (1+x)f(x)$. Bestimmen Sie $\ker(T)$ und $\operatorname{ran}(T)$.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Bestimme Sie den Typ der Differentialgleichung

$$e^{xy}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + (x+y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + x^2y\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 4u(x,y)$$

in Abhängigkeit vom Bereich in dem die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ liegen.