2. Teil

Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Vektorraum und $\|\cdot\| : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung.

a) Geben Sie an, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{H}$ definiert.

b) Untersuchen Sie, ob es sich bei der Abbildung

$$\|\cdot\| : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \quad \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sum_{n=1}^{\infty} \left(3e^{-n} - 1\right) |x_n|$$

um eine Norm auf $\ell^1(\mathbb{N})$ handelt.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Sei $L^2(0, 2\pi)$ der Raum der auf $(0, 2\pi)$ quadratintegrierbaren Funktionen.

(i) Definieren Sie den Begriff der schwachen Ableitung für eine Funktion $f \in L^2(0, 2\pi)$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in (0, \pi] \\ 2\pi^2 - \pi x & \text{für } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

schwach differenzierbar ist, und bestimmen Sie die schwache Ableitung von f.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Gegeben sei der Operator $T : L^2(-\pi, \pi) \to L^2(-\pi, \pi)$, definiert durch

$$Tf = -f'' \quad \text{mit} \quad \operatorname{dom} T = \{f \in H^2(-\pi, \pi) \mid f'(-\pi) = f'(\pi) = 0\}$$

mit Neumann-Randbedingungen.

(i) Zeigen Sie $(Tf, f)_{L^2} \geq 0$ für alle $f \in \operatorname{dom} T$. Ist T symmetrisch?

(ii) Verwenden Sie (i), und rechnen Sie auf direktem Wege nach (d.h. ohne zu verwenden, dass T sogar selbstadjungiert ist), dass alle Eigenwerte von T nicht-negativ sind.

(iii) Bestimmen Sie das Punktspektrum $\sigma_p(T)$ von T.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ exponentiell beschränkt mit Schranke $\gamma \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \forall t \in [0, \infty)$$

für eine Konstante $M \geq 0$.

(i) Definieren Sie die Laplacetransformation $\mathcal{L}[f](s)$ von f, und geben Sie an für welche Punkte $s \in \mathbb{C}$ diese berechnet werden kann.

(ii) Bestimmen Sie die Laplacetransformation der Funktion $f(t) = te^t$ für alle zulässigen $s \in \mathbb{R}$.