## 2. Teil

**Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.**

### Aufgabe 2: (3 Punkte)

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{ix\cos(\sqrt{x})}}{x^{\alpha}}, \quad x \in (1, \infty),$$

ein Element des Raumes $L^4(1, \infty)$?

### Aufgabe 3: (3 Punkte)

(i) Sei $\mathcal{H}$ ein Vektorraum und $(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Welche Eigenschaften müssen erfüllt sein, damit $(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt ist?

(ii) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $(\cdot, \cdot) : C([0, 1]) \times C([0, 1]) \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(f, g) = f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)}, \quad f, g \in C([0, 1]),$$

ein Skalarprodukt auf $C([0, 1])$ ist.

### Aufgabe 4: (5 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

(i) Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit $T$ eine Isometrie ist?

(ii) Der lineare Operator $S : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$Sf(x) = cf(2x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $c \in \mathbb{C}$ eine gegebene komplexe Zahl ist. Zeigen Sie, dass $S$ beschränkt ist.

(iii) Bestimmen Sie den adjungierten Operator $S^*$.

(iv) Finden Sie alle $c \in \mathbb{C}$, so dass der Operator $S$ eine Isometrie ist.

### Aufgabe 5: (3 Punkte)

(i) Wie ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}[f]$ einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiert?

(ii) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -1, & |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$