2. Teil

Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 2:

(2 Punkte)

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Folge

$$x = (1, -2^{-\alpha}, 3^{-\alpha}, -4^{-\alpha}, \dots)$$

ein Element von $\ell^1(\mathbb{N})$?

Aufgabe 3:

(4 Punkte)

Der Integraloperator $T : L^1(0, 1) \rightarrow L^1(0, 1)$ sei durch

$$(Tf)(x) = \int_0^1 \frac{y}{(1+x)^2} f(y) dy \quad \text{mit} \quad \text{dom} T = L^1(0, 1)$$

gegeben.

- Zeigen Sie, dass T linear und beschränkt ist, und geben Sie eine obere Schranke für die Operatornorm $\|T\|$ an.
- Bestimmen Sie $\ker(T)$ und $\text{ran}(T)$.

Aufgabe 4:

(4 Punkte)

Seien $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.

- Geben Sie die Definition des adjungierten Operators an.
- Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit T unitär ist?
- Entscheiden Sie, ob der lineare Operator $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $(Tf)(x) := f(x+1)$ unitär ist.

Aufgabe 5:

(4 Punkte)

Es sei die Abbildung $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ definiert durch

$$T(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots) \quad \text{mit} \quad \text{dom}(T) = \ell^2(\mathbb{N}).$$

- Zeigen Sie, dass T ein linearer und beschränkter Operator ist.
- Zeigen Sie, dass $(Tx, x) \geq 0$ für alle $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ gilt. Ist T selbstadjungiert?
- Bestimmen Sie das Punktspektrum von T und geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.