Uni Graz | N. Reichelt, W. Schweiger
TU Graz | P. Schlosser, G. Stenzel

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2020/21

Probeklausur

Aufgabe 1
Überprüfen Sie, ob die Abbildung $(\cdot,\cdot) : C([0,10]) \times C([0,10]) \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(f,g) := \sum_{n=1}^{9} f(n)\overline{g(n)}, \quad f,g \in C([0,10]),$$

ein Skalarprodukt auf $C([0,10])$ ist.

Aufgabe 2
Es sei die Abbildung $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definiert durch

$$(Tf)(x) := \int_0^1 3xyf(y)dy, \quad x \in (0,1), f \in L^2(0,1).$$

(i) Zeigen Sie, dass T ein linearer und beschränkter Operator ist.

(ii) Entscheiden Sie, ob T eine Orthogonalprojektion in $L^2(0,1)$ ist.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{t^2}{1+t}\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) &= te^t, \qquad && x \in \mathbb{R}, t \in (0,\infty), \\ u(0,x) = u_0(x) &= e^x, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und führen Sie die Probe durch.

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) &= 0, \qquad && t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= e^x, && x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial t}u(0,x) &= \cos(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und führen Sie die Probe durch.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte $\lambda > 0$ und die zugehörigen Eigenfunktionen $f \in L^2(0,2\pi)$ des Sturm-Liouville-Eigenwertproblems

$$\begin{aligned} -f''(x) &= \lambda f(x), \quad x \in (0,2\pi) \\ f'(0) &= f'(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 6
Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung

$$(x^2-y^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+e^{2x\cos(y)}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y)+\frac{1}{1+x^2y^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)+\cosh(x)\sinh(y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 0$$

in Abhängigkeit vom Bereich, in dem die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ liegen. Skizzieren Sie zudem die Bereiche im $\mathbb{R}^2$ in denen die Differentialgleichung elliptisch, hyperbolisch und parabolisch ist.