Aufgabe 1: (5 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die Abbildung $\|\cdot\| : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|x_n|, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}),$$

eine Norm auf $\ell^1(\mathbb{N})$ ist.

~ **Aufgabe 2:** (5 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) &= 0, \qquad && t>0, x\in\mathbb{R},\\
u(0,x) &= \cosh(x), && x\in\mathbb{R},\\
\frac{\partial}{\partial t}u(0,x) &= e^x + e^{-x}, && x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Der lineare Operator $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$(Tf)(x) := \frac{1}{1+x^2}f(x+1), \quad x\in\mathbb{R}, f\in L^2(\mathbb{R}).$$

(i) Zeigen Sie, dass T beschränkt ist und finden Sie eine obere Schranke für $\|T\|$.

(ii) Bestimmen Sie den adjungierten Operator T^* und entscheiden Sie ob T selbstadjungiert ist.

✓ **Aufgabe 4:** (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung

$$(x^2+y^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + e^{x+y}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + \ln\left(1+x^2y^2\right)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = \cos(x)u(x,y)$$

in Abhängigkeit vom Bereich, in dem die Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ liegen. Skizzieren Sie zudem die Bereiche im $\mathbb{R}^2$ in denen die Differentialgleichung elliptisch, hyperbolisch und parabolisch ist.